مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

مسابقة موهوب
Mawhoob Competition

الرياضيات

حقيبة التدريب

إعداد

سلطان البركاتي   طارق سلامة   صفوت الطناني

2022

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

عزيزي الطالب عزيزتي الطالبة:

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة "هي مؤسسة حضارية غير هادفة للربح ، أسسها خادم الحرمين الشريفين الملك عبدالله بن عبدالعزيز آل سعود - رحمه الله – عام 1419 هـ/1999م ، تسعى إلى إيجاد بيئة محفزة للموهبة والإبداع، وتعزيز الشغف بالعلوم والمعرفة، لبناء قادة المستقبل من خلال منهجية، وفق أحدث الأساليب العلمية وأفضل الممارسات العالمية في تعليم الموهوبين والمبدعين، لاستثمار طاقاتهم وتمكينهم؛ كونهم الرافد الأساس لازدهار الانسانية، وتسعى موهبة إلى دعم الرؤية بعيدة المدى للإبداع والموهبة ورعايتها في المملكة بما يوائم تطلعات وطموح أهداف رؤية 2030 في تطوير القدرات البشرية الموهوبة واعداد جيل قادم يكون عماد الإنجاز وأمل المستقبل، وعليه تؤمن موهبة بأن الاستثمار في تعليم الموهوبين ليس رفاهية ولا عملًا نخبويًّا بل ضرورة للارتقاء بمعايير عالية الجودة في تعزيز قدراتهم حتى يسهموا في بناء مجتمعهم ليصبحوا قادة المستقبل، كما تتمتع موهبة بخبرات طويلة في تنفيذ العديد من البرامج للطلبة الموهوبين والمبدعين فهي تمثل دوراً رئيسًا في المنظومة المؤسساتية الحالية الداعمة لتعليم الموهوبين في المملكة وتتكامل مع نظام التعليم الوطني من خلال برامج التعرف والرعاية الشاملة والمتكاملة للموهوبين وتبادل الخبرات بما يخص التخطيط والتطبيق القيّم مع المعنيين مثل وزارة التعليم والمؤسسات الأكاديمية العالمية حول كيفية تصميم البرامج والمبادرات وتقديمها من خلال ممارسات تربوية متقدمة.

ونظرا لأن المسابقات العلمية لم تعد ترفاً يمكن الاستغناء عنه، بل أصبحت معادلاً موضوعياً للتفوق والتقدم في المجالات العلمية، ولأنه مع زخم المنافسة للصعود على منصات التتويج أصبح على كل من يريد أن يحقق ذلك أن يسلك كافة السبل التي تتيح له ليس فقط الوصول إلى تلك المنصات، بل حجز مكان دائم عليها.

وفي هذا السياق تأتي مسابقة موهوب كمسابقة علمية سنوية تستهدف الطلبة من الصف السادس الابتدائي الى الصف الأول الثانوي، كأداة لاكتشاف الطلبة المتميزين في العلوم والرياضيات والمعلوماتية والفيزياء والكيمياء والأحياء، بهدف إلحاقهم بالبرامج التدريبية المتخصصة؛ لتأهيلهم للمشاركة في المسابقات الدولية في العلوم والرياضيات . هذا وتتكون مسابقة موهوب من ثلاث مراحل تتم جميعها عن بعد:

اختبار موهوب 1 ← تدريب موهوب 30 ساعة ← اختبار موهوب 2

وبين يديك الآن الحقيبة الخاصة بمسابقة موهوب والتي من خلالها نتعرف بشكل مبدئي على طبيعة موضوعات وأسئلة المسابقات الدولية وبعض الأساسيات التي تتكامل مع موضوعات المناهج الدراسية الواجب توافرها حتى ندخل في مرحلة الاتقان التي تضعك على أول طريق المنافسة لنيل شرف تمثيل الوطن في المسابقات الدولية.

ولقد حرصنا في هذه الحقيبة أن نقدم لكم المادة العلمية بلغة سهلة وجذابة تدفع شغفكم الى نقاط ابعد وعوالم أخرى من التحدي والاستمتاع بالتعلم. كما أننا ننصح بألا تكون هذه المادة هي مصدرك الوحيد فعليك البحث والاطلاع بشكل مستمر فإن هذا هو ما يصنع الفارق دائما في قدرتك على مواصلة الطريق..

ولطالب الرياضيات على وجه الخصوص هناك بعض الإرشادات الهامة:

1- لا يسمح الحاسبة في أي مسابقة دولية، لذا لن يكون من المناسب نهائيا استخدمها في أي مرحلة من مراحل المسابقة أو التدريب.
2- العبارات الرياضية (التي تحوي أرقاماً وربما رموزا) يجب قراءتها من اليسار لليمين.
3- طبيعة أسئلة المسابقات في عمومها أنها ليست تقليديه ودائما ما تتطلب مهارات تفكير عليا.

ولمزيدا من المعلومات يمكنكم الدخول على الرابط التالي.

https://www.mawhiba.org/Ar/programs/competitions/mawhoob/Pages/default.aspx

المحتويات

الأعداد الصحيحة وخواصها

• تعريفات ومفاهيم

مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$\mathbb{N} = \ 1,2,3,4,.....$$.

مجموعة الأعداد الكلية:

$$W = \ 0,1,2,3,4,.....$$.

مجموعة الأعداد الصحيحة:

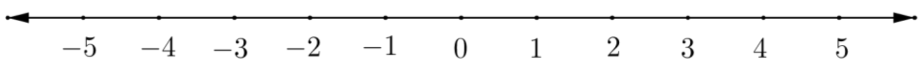
$$\mathbb{Z} = \ .....,-3-2,-1,0,1,2,3,4,.....$$.

يمكن تقسيم الأعداد الصحيحة إلى ثلاث مجموعات هي:

- الأعداد الصحيحة الموجبة $1,2,3,\ldots$
- الصفر
- الأعداد الصحيحة السالبة $-1,-2,-3,\ldots$.

لاحظ العدد $+1$ نكتبه اختصاراً 1 بمعنى أن إشارة موجب في العادة لا تكتب ولا تنطق، بينما السالب يكتب وينطق، لاحظ أيضاً أن الصفر ليس موجباً وليس سالباً.

خط الأعداد:



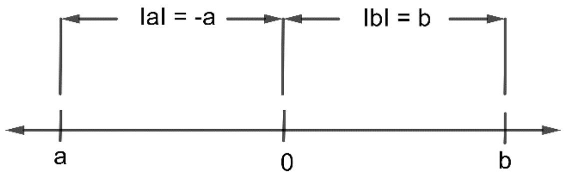
يستخدم خط الأعداد لتوضيح ترتيب الأعداد الصحيحة، فكلما اتجهنا يميناً تزيد قيمة العدد الصحيح، وكلما اتجهنا يساراً تقل قيمة العدد الصحيح. مما يعني أن أي عدد موجب أكبر من أي عدد سالب، وكذلك الصفر أكبر من أي عدد سالب وأصغر من أي عدد موجب. يقال للعددين $5,-5$ أن كل منهما نظير (أو معكوس) جمعي للآخر، عموماً العددان الصحيحان $a,-a$ كل منهما نظير جمعي للآخر، بينما الصفر نظير جمعي لنفسه.
لاحظ أن العدد ونظيره الجمعي يمثلهما نقطتان على خط الأعداد تبعدان البعد نفسه عن النقطة التي تمثل الصفر، ولكن في جهتين مختلفتين منه.

القيمة المطلقة للعدد الصحيح:

نرمز للقيمة المطلقة للعدد الصحيح a بالرمز $|a|$. فمثلاً

$|5| = 5, |-5| = 5, |0| = 0$ وهكذا.

وهندسياً كل عدد صحيح يمثل بنقطة على خط الأعداد، $|a|$ تعني المسافة بين النقطة الممثلة للعدد a ونقطة الأصل على خط الأعداد، عموماً $|a-b|$ تعني المسافة بين النقطتين الممثلتين للعددين a, b .



عندما نأخذ القيمة المطلقة لمقدار جبري وكانت إشارته ($-$) يمكن جعله غير سالب بإزالة ($-$).

القواعد الأساسية في الجمع والطرح والضرب والقسمة

خاصية الإبدال:

- $a + b = b + a$
- $ab = ba$

خاصية التوزيع:

- $ac + bc = (a + b)c = c(a + b)$
- $ac - bc = (a - b)c = c(a - b)$

خاصية التجميع:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(ab)c = a(bc)$

خاصية الانغلاق:

تتحقق في الجمع والضرب والطرح فقط دون القسمة! فمثلاً لكل عددين صحيحين a, b فإن $a + b$ وكذلك $a \times b$ و $a - b$ عدد صحيح بالضرورة، بينما $a \div b$ ليس بالضرورة عدد صحيح.

خاصية المحايد الجمعي:

هو الصفر بمعنى لكل عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$a + 0 = 0 + a = a \ .$$

خاصية النظير الجمعي:

لكل عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ يوجد عدد $-a \in \mathbb{Z}$ يحققان أن

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

الأسس:

تستخدم الأسس للتعبير عن حاصل ضرب متكرر، فمثلاً:

$$2\times2\times2=2^3 \ .$$

وكذلك

$$a^n=\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{n}$$

خواص الأسس (القوى):

إذا كان $x,y>0$ و $m,n\in\mathbb{Z}$ فإن:

$(1)x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ $\quad(2)\dfrac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$ $\quad(3)(x^m)^n=x^{mn}$

$(4)(xy)^n=x^n y^n$ $\quad(5)(\dfrac{x}{y})^n=\dfrac{x^n}{y^n}$

قاعدة فك الأقواس:

لأي عددين صحيحين x,y

$$\begin{array}{ll}(1)\ x+(y)=x+y\ , & (4)\ x+(-y)=x-y\\ (2)\ x-(y)=x-y\ , & (5)\ x-(-y)=x+y\\ (3)\ x(-y)=(-x)y=-xy\ , & (6)\ (-x)(-y)=xy\end{array}$$

(4)عندما n عدد صحيح فردي:

$$(-1)^n=-1 \ .$$

عندما n عدد صحيح زوجي:

$$(-1)^n=1 \ .$$

أمثلة:

(1)أوجد قيمة كل من:

$a)\ (-2)+12=$ $\quad b)\ (-3)+(-6)+5=$ $\quad c)\ -3-11-31=$

$d)\ (-5)\times(-4)$ $\quad e)\ (-4)\times8=$ $\quad f)\ (-1)\times2\times2=$

$g)\ |-2|+(-2)=$ $\quad h)\ (-3)^2-3=$

الحل

$a)\ (-2)+12=10$

$b)\ (-3)+(-6)+5=[(-3)+(-6)]+5=(-9)+5=-4$

$c)\ -3-11-31=-(3+11+31)=-45$

$d)\ (-5)\times(-4)=20$

$e)\ (-4)\times8=-32$ $\quad f)\ (-1)\times2\times2=-4$

$g)\ |-2|+(-2)=2-2=0$ $\quad h)\ (-3)^2-3=9-3=6$

(2) بسط كل من:

$$a)\ \ (a^2)^3 \times a^3 =$$

$$b)\ \ \frac{x^3 \times x}{x^2} =$$

الحل

$$a)\ (a^2)^3 \times a^3 = a^6 \times a^3 = a^9$$

$$b)\ \frac{x^3 \times x}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

(3) بسط

$$3a + \{-4b - \left[4a - 7b - (-4a - b)\right] + 5a\}$$

الحل

$$\begin{aligned} 3a + \{-4b - \left[4a - 7b - (-4a - b)\right] + 5a\} &= 3a + \{-4b - \left[4a - 7b + 4a + b\right] + 5a\} \\ &= 3a + \{-4b - \left[8a - 6b\right] + 5a\} \\ &= 3a + \{-4b - 8a + 6b + 5a\} \\ &= 3a + \{2b - 3a\} \\ &= 2b + (3a - 3a) \\ &= 2b \end{aligned}$$

تدريبات:

(1) أوجد قيمة كل من:

$g)\ (-4) \times (-8) =$

$h)\ -8 - (-5) =$

$i)\ -1 - 4 + 7 =$

$j)\ 2 \times 4 + 6 \times 5 =$

$k)\ |-6| =$

$m)\ |-3| - |-7| =$

$a)\ (-4) + 9 =$

$b)\ -42 \div 7 =$

$c)\ (2)^5 =$

$d)\ (-4)^3 =$

$e)\ (-5)^2 =$

$f)\ |0| =$

(2) بسط كل من:

$c)\ (a^3)^4 =$

$d)\ (x^2)^3 \times (x^4)^5 =$

$f)\ \frac{a^4 \times a^5}{a^3 \times a^6} =$

$a)\ a^2 \times a^5 =$

$b)\ x^7 \div x^3 =$

$(e)\ \frac{a^3 \times a^7}{a^2 \times a^6} =$

(3) احسب القيم العددية لكل مما يأتي:

$(a)(-7)+(-12)-(-14)-(-15)-(-18)-(-38)$

$(b)(-5)^2+|-6|-(-1)^{1441}$

أسئلة للتحدي

(1) أوجد قيمة:

$$.-1-(-1)^1-(-1)^2-(-1)^3-......-(-1)^{99}-(-1)^{100}$$

(2) أكمل

$$.1234\times 9999=...$$

(3) بسط

$$.5\{(2a-3)-[7(4a-1)-20]\}-(3-8a)$$

(4) يدور قمر صناعي دورة كاملة حول الأرض في 7 ساعات. كم مرة سيدورها ذلك القمر حول الأرض في أسبوع؟

(5) تم إلقاء 6 من أحجار النرد المتماثلة. إذا كان مجموع الأرقام التي تم الحصول على أوجهها الست هو 32 . ما أصغر عدد يمكن ظهوره على أحد الأوجه الست؟

(6) كتبت سحر كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100 دون أن تتخطى أي عدد. كم مرة كتبت سحر الرقم 2؟

(7) كتب سعد الأعداد الصحيحة المتتالية من 1 إلى N، إذا علمت أنه تم استخدام الرقم 1 خمس عشرة مرة بينما استخدم الرقم 2 أربع عشر مرة. ما قيمة N؟

(8) ما قيمة:

$$؟\ 1-2+3-4+...-100+101$$

(9) كم عدد صحيح موجب مكون من ثلاث خانات يوجد به رقمان مختلفان بالضبط في تمثيله (مثل 232 أو 466 وهكذا)؟

(10) تعرض ساعتي الرقمية على مدار 24 ساعة الساعات والدقائق فقط. كم عدد التوقيتات المختلفة المعروضة في فترة 24 ساعة يظهر فيها الرقم 5 على ساعتي الرقمية مرة واحدة على الأقل؟

الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية

يمكن تقسيم الأعداد الصحيحة لنوعين من الأعداد، أعداد تقبل القسمة على 2 تسمى أعداداً زوجية، وبقية الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على 2 تسمى أعداد فردية. يمكن كتابة العدد الصحيح الزوجي على صورة $2n$، حيث n عدد صحيح. كما يمكن كتابة العدد الصحيح الفردي على صورة $2n+1$، حيث n عدد صحيح.

أي أن العدد الصحيح إما أن يكون زوجياً أو فردياً ولا يمكن أن يكون كلاهما. انظر للخواص التالية:

(1) فردي $\neq$ زوجي.

(2) فردي ± زوجي = زوجي ± فردي = فردي.

(3) زوجي± زوجي = زوجي، فردي ± فردي = زوجي.

(4) إذا كان ناتج ضرب عددين صحيحين زوجي فإن أحدهما على الأقل زوجي.

(5) ناتج ضرب عددين صحيحين متتاليين يجب أن يكون زوجي.

(6) إذا كان مجموع أعداد صحيحة فردي، فإن عدد الأعداد الفردية في تلك الأعداد فردي.

(7) إذا كان مجموع أعداد صحيحة زوجي، فإن عدد الأعداد الفردية في تلك الأعداد زوجي.

(8) إذا كان ناتج ضرب أعداد صحيحة فردي، فإن جميع تلك الأعداد يجب أن تكون فردية.

(9) إذا كان ناتج ضرب أعداد صحيحة زوجي، فإن عدد على الأقل من تلك الأعداد يجب أن يكون زوجي.

لاحظ أنه يمكنك أن تفرض أي عددين أحدهما زوجي والآخر فردي وتتأكد من صحة الخواص السابقة.

الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة:

يمكن تقسيم الأعداد الطبيعية (غير الواحد) إلى أعداد أولية وأعداد مؤلفة. يكون العدد مؤلفاً إذا أمكن كتابته كحاصل ضرب عددين طبيعيين كلاهما أصغر منه. مثلاً $3\times 2=6$.

إذا لم يمكن ذلك وكان العدد لا يساوي 1 فإن العدد يسمى أولي.

العدد 1 ليس مؤلف ولا أولي. الأعداد الأولية مثل قوالب الطوب نستطيع أن نستخدمها لبناء كل الأعداد الطبيعية.

لتوضيح ذلك خذ مثلاً العدد 240وهو عدد مؤلف لأنه يمكن كتابته $42\times 10=240$. ولكن كل من العددين 10و 42 مؤلفاً أيضاً. بالفعل $7\times 6=42, 5\times 2=10$. بما أن $3\times 2=6$. نجد

$$240=2\times 2\times 3\times 5\times 7$$

وهذا تحليل كامل لعددنا لعوامله الأولية. ولكن ماذا لو حللنا العدد 420 بطريقة أخرى وبدأنا مثلاً $28\times 15=240$ ؟ المفاجأة ستنتهي لنفس التمثيل كضرب أعداد أولية. يسمى هذا "النظرية الأساسية في الحساب": أي عدد طبيعي يختلف عن الواحد يمكن تمثيله بطريقة وحيدة كضرب أعداد أولية في ترتيب تصاعدي وسنطلق عليها "الصيغة الأولية".

من تعريف العدد الأولي يمكننا كتابة بعض الأعداد الأولية بالترتيب

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,....$$

ولا تنسى أن العدد الزوجي الوحيد والأولي في الوقت نفسه هو 2.

لاحظ أن

$3\cdot 2^9$ يقبل القسمة على 2 لأن 2 أحد عوامل العدد في صيغته الأولية، بينما $3\cdot 2^9$ لكنه لا يقبل القسمة على 5 لأن الصيغة الأولية للعدد لا تحتوي العدد الأولي 5 ، كذلك $3\cdot 2^9$ يقبل القسمة على 8 لأن $2^3=8$ أي تكرر ضرب العدد الأولي 2 فيها 3 مرات بينما تكرر ضرب العدد 2 تسع مرات في الصيغة الأولية للعدد المعطى، أيضاً $3\cdot 2^9$ لا يقبل القسمة على 9 لأن $3\times 3=9$ بينما الصيغة الأولية للعدد المعطى لا تشتمل إلا على 3 مرة واحدة فقط، أيضاً $3\cdot 2^9$ يقبل القسمة على 6 لأن $3\times 2=6$ والصيغة الأولية للعدد المعطى تشتمل على كل من العددين 2 و 3.

تعريف مهم:

يقال لعددين أنهما أوليان نسبياً أو أوليان فيما بينهما إذا لم يكن لهما قاسم مشترك أكبر من 1.

مثلاً: أي عددين أوليين مختلفين سيكونان طبعاً أوليان نسبياً، العدد 1 أولي نسبياً مع أي عدد طبيعي آخر.

اختبارات سريعة لقابلية القسمة على بعض الأعداد:

– متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 2؟

إذا كان رقم الآحاد زوجي أي أحد الأرقام التالية : $0,2,4,6,8$.

– متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 5؟

إذا كان رقم الآحاد 0 أو 5.

– متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 3؟

إذا كان مجموع أرقام خاناته يقبل القسمة على 3 .

– متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 9؟

إذا كان مجموع أرقام خاناته يقبل القسمة على 9.

– متى يقبل العدد القسمة على 7؟

إذا كان 7 يقسم العدد الصحيح الناتج من حذف خانة الآحاد ثم طرح ضعف قيمة هذه الخانة من الرقم الناتج.

– متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 11؟

إذا كان الفرق بين مجموع أرقام خاناته فردية الترتيب ومجموع خاناته زوجية الترتيب يقبل القسمة على 11.

– متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 4؟

إذا كان العدد المكون من رقمي آحاده وعشراته يقبل القسمة على 4 . ويمكن حصر الأعداد التي تقبل القسمة على 4 كالتالي: إذا كان رقم الآحاد 2 أو 6 فإن رقم العشرات فردي، وإذا كان رقم الآحاد 0 أو 4 أو 8 فإن رقم العشرات زوجي.

- متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 8 ؟
  إذا كان العدد المكون من أرقام آحاده وعشراته ومئاته يقبل القسمة على 8 .
- متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 6 ؟
  إذا كان العدد يقبل القسمة على $2,3$.
- متى يقبل العدد الصحيح القسمة على 10 ؟
  إذا كان آحاده 0 .

القسمة الإقليدية

لأي أعداد صحيحة ليست سالبة فإن:

المقسوم = المقسوم عليه × خارج القسمة + الباقي

حيث الباقي دائماً أصغر من المقسوم عليه، والمقسوم عليه لا يساوي صفراً.

مثلاً لو أردنا قسمة 33 على 5 فإن اختيار قيمة خارج القسمة يخضع لشرط أنه يجعل الباقي أصغر من المقسوم عليه والعدد الوحيد الذي يحقق ذلك هو 6 ، ويكون الباقي 3 .

كنتيجة مباشرة عند القسمة على العدد الصحيح الموجب n فإن البواقي الممكنة هي $0,1,2,\dots,n-1$.

تدريبات:

(1) كم باقي قسمة 53 على 9 ؟

(2) كم باقي قسمة 4 على 9، وكم خارج القسمة؟

(3) إذا كان $m < n$ كلاهما صحيح موجب، فكم باقي قسمة m على n ؟

(4) إذا كان باقي قسمة العدد n على 3 يساوي 2 فكم باقي قسمة العدد $8n$ على 5؟

(5) حلل كل من الأعداد: 1800 و 324 و 156 لعواملها الأولية.

الحل:

(1) 8

(2) الباقي 4 وخارج القسمة 0.

(3) m

(4) الباقي 1

(5)

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$324 = 2^2 \cdot 3^4$$
$$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$$

أسئلة تحدي:

(1) ما أكبر عدد صحيح يمكن أن يقسم مجموع أي ثلاثة أعداد صحيحة متتالية؟

(2) يبيع محل أيس كريم الحبة الواحدة بريال واحد، بينما 7 حبات ب 6 ريال فقط. إذا أردنا شراء 2017 حبة، كم أقل عدد من الريالات نحتاج لإتمام ذلك؟

(3) أي زوج من الأرقام يجب إضافته على يمين العدد 2004 لنحصل على عدد جديد مكون من 6 خانات يقبل القسمة على 101؟

(4) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 100.. ولها نفس الباقي عند القسمة على $5, 7$ ؟

(5) العدد الصحيح $63X904$ مكون من 6 خانات وهو مضاعف زوجي للعدد 27. ما الرقم الذي تمثله X ؟

(6) كم عدد مضاعفات العدد 3 الموجبة الأقل من 1000 ولا يقبل القسمة على 9 أو 10؟

(7) عددان كل منهما يقبل القسمة على 7 وكل منهما مكون من خانتين وحاصل ضربهما 7007. ما هو مجموع هذين العددين؟

(8) ليكن N أصغر عدد صحيح موجب مجموع أرقام خاناته يساوي 2019 . ما هو مجموع أرقام خانات العدد $N+1$ ؟

(9) الأحرف a, b, c ترمز إلى أرقام غير صفرية. العدد الصحيح abc مضاعف للعدد 3؛ العدد الصحيح $cbabc$ مضاعف للعدد 15 ؛ والعدد الصحيح $abcba$ مضاعف للعدد 8. ما هو العدد الصحيح abc ؟

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$

العدد النسبي هو كل عدد يمكن كتابته في صورة $\frac{a}{b}$ حيث a,b عددان صحيحان، $b \neq 0$ ، يسمى a البسط، ويسمى b المقام.

من التعريف السابق نستنتج أن كل الأعداد الصحيحة أعداد نسبية فمثلاً:

$$5 = \frac{5}{1}, -4 = \frac{-4}{1}, 0 = \frac{0}{1}$$ وهكذا.

أيضاً العدد $5\frac{1}{2}$ نسبي لأن يمكن كتابته على الصورة $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ وهكذا.

أما الأعداد العشرية المنتهية فهي نسبية فمثلاً:

$$0.3 = \frac{3}{10}, 1.7 = \frac{17}{10}, 2.03 = \frac{203}{100}$$ وهكذا.

الأعداد العشرية غير المنتهية نوعان:

دورية مثل:

$$0.333... = 0.\bar{3}, \quad 0.521521521... = 0.\overline{521}$$ وهي نسبية

والغير دورية مثل:

$0.3456742156775891....$ فهي ليست نسبية.

لاحظ النسبة التقريبية والتي يرمز لها بالعربية ط وباللغات الأخرى π وتساوي تقريباً 3.14 أو بتقريب آخر $\frac{22}{7}$ تعتبر عدد غير نسبي.

خواص الجمع والطرح في الأعداد النسبية:

نفس خواص الجمع في الأعداد الصحيحة.

ولكن مهلاً دائماً نسمع من يردد عند جمع عددين نسبيين أو طرحهما لابد من توحيد المقامات والسؤال لماذا؟

والحقيقة أن الإجابة على ذلك السؤال ليست بالسهولة بمكان! دعنا نحاول.

كلنا نعلم أن: ناتج إضافة ثلاثة جمال إلى خمسة جمال هو ثمانية جمال، وعموماً:

$$3x + 5x = 8x$$

باعتبار أن الرمز x يعبر عن نفس الشيء.

الآن لو قسمنا بيتزا مثلاً لسبعة أجزاء متساوية ومتطابقة يسمى الجزء الواحد سبع ويرمز له $\frac{1}{7}$.

وباعتبار سبع الواحد شيئاً في حد ذاته، الآن ما ناتج جمع سبعين مع ثلاثة أسباع، ستكون الإجابة حتماً خمسة أسباع.

ولكن باستخدام الرموز يبدو الأمر مختلفاً، التعبير الرمزي سيكون

$$2(\frac{1}{7}) + 3(\frac{1}{7}) = 5(\frac{1}{7})$$.

ولأن $2(\frac{1}{7})$ تكتب $\frac{2}{7}$ فيمكننا التعبير بشكل أبسط $\frac{5}{7}=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ ، ولكن لمن ينظر للعلاقة الأخيرة تبدو أعقد لأننا جمعنا البسط لكل من الكسرين بشرط أن يكون المقام نفسه (لاحظنا أن الكثيرين يريدون لو يجمعوا المقامات أيضاً فلا تكن مثلهم).

يمكنك بمناقشة مماثلة أن تستنتج أن طرح العددين النسبيين يستلزم أيضاً توحيد المقامات. ماذا لو كانت المقامات مختلفة؟ كيف نقوم بتوحيد المقامات؟ لنصبر قليلاً ستعرف الإجابة بعد معرفة الخاصية التالية للعدد النسبي.

خاصية التكافؤ لعددين نسبيين:

إذا كان $\frac{a}{b}$ عدد نسبي، k عدد صحيح غير الصفر فإن:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{a\div k}{b\div k}$$

بمعنى العدد النسبي يمكن كتابته بعدد غير منته من الصور فمثلا:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\dots$$

$$\frac{18}{24}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

ولكن تظل الصورة التي يكون البسط والمقام أوليان نسبياً هي الصورة الأجمل وتسمى أبسط صورة لسهولة التعامل معها في العمليات الحسابية، لذا ننصحك دائماً بوضع العدد النسبي في أبسط صورة.

الآن يمكنك جمع عددين نسبيين مختلفي المقام:

مثلاً عند إجراء $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$. نبحث عن مضاعف مشترك للعددين $3,5$ (ويفضل أن يكون أصغر)، وليس من الصعب أن نتأكد أن 15 مضاعف مشترك (أصغر) لهذين العددين. الآن نعيد كتابة الكسرين بشكل مكافئ كالتالي

$$\frac{1\times 3}{5\times 3}+\frac{2\times 5}{3\times 5} \text{ أي } \frac{3}{15}+\frac{10}{15}.$$

ومن ثم المجموع $\frac{13}{15}$.

الطرح سيتم التعامل معه بنفس الطريقة.

تعريف الضرب والقسمة في الأعداد النسبية:

كيف نضرب عددين نسبيين، وما معنى ذلك؟ مثلاً عندما نسألك كم نصف العدد 100 ستجيب فوراً 50 . بدا وكأنك قسمت العدد على 2 .

السؤال الآن كم ثلاثة أنصاف العدد 100، ليس من الصعب أن تجيب بأنها 150. بدا وكأنك قسمت على 2 ثم ضربت الناتج في 3 .

دعنا نسأل سؤال أعقد:

كم ثلاثة أنصاف العدد $\frac{1}{7}$ ؟ سنحتاج أن نقسم العدد على 2 ثم نضرب الناتج في 3 . ولكن كم ناتج قسمة $\frac{1}{7}$ على 2 ؟ لأن

$$\frac{1}{7}=\frac{2}{14}=2\left(\frac{1}{14}\right).$$

وبالتالي نصفه هو $\frac{1}{14}$ (ربما يقترح أحدنا أن الناتج كأننا ضربنا المقام فقط في 2)، عندما نضربه في 3 يصبح ثلاثة نسخ منه ويكتب

$$3\left(\frac{1}{14}\right)=\frac{3}{14}.$$

دعنا نصيغ ما حققناه بشكل رمزي:

$$\cancel{1}00\times\frac{3}{\cancel{2}}=50\times 3=150.$$

وكذلك

$$\frac{1}{7}\times\frac{3}{2}=\frac{1\times 3}{7\times 2}=\frac{3}{14}$$

عموماً إذا كان $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

أخيراً إذا علمت أن القسمة عملية عكسية للضرب فهل يمكنك تبرير تعريف القسمة التالي:

إذا كان $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

خواص الضرب في الأعداد النسبية:

1 – الانغلاق.

2– الإبدال.

3 – التجميع.

4– المحايد الضربي وهو الواحد.

5– النظير الضربي: لكل عدد نسبي $\frac{a}{b}$ خلاف الصفر يوجد عدد $\frac{b}{a}$ يسمى كل منهما نظير ضربي للآخر بحيث $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1$.

6– توزيع الضرب على الجمع والطرح.

كتابة العدد الدوري في صورة عدد نسبي:

مثال: اكتب العدد الدوري $0.\overline{7}$ على صورة عدد نسبي.

الحل:

بفرض

$$x=0.\overline{7}=0.7777....$$

بضرب الطرفين في 10 نحصل على:

$$10x=7.7777....=7+0.777...$$

ومنها

$$10x=7+x$$

بطرح x من الطرفين نحصل على

$$9x=7$$

وأخيراً بقسمة الطرفين على 9 نجد أن:

$$x=\frac{7}{9}\cdot$$

تدريب:

اكتب العدد الدوري $0.\overline{17}$ على صورة عدد نسبي.

إرشاد: نفس خطوات المثال، ولكن ستحتاج أن تضرب في 100 بدلاً من 10.

طريقة سريعة لكتابة العدد الدوري في صورة عدد نسبي:

(البرهان ليس صعباً):

يمكننا كتابة العدد الدوري بشرط أن يكون الجزء الدوري على يمين الفاصلة مباشرة، وذلك بأن نضع الجزء الدوري في البسط والمقام عدد أرقامه كلها تسعات وعددها يساوي عدد أرقام الجزء الدوري كالتالي:

$$0,\overline{7}=\frac{7}{9}\,,0.\overline{73}=\frac{73}{99},\,0.\overline{732}=\frac{732}{999},.....$$

ويمكن تطويرها لكتابة أي عدد دوري آخر مثلاً:

$$\begin{aligned}0.1\overline{7}&=0.1+0.0\overline{7}\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{7}{9}\\&=\frac{1}{10}+\frac{7}{90}\\&=\frac{9}{90}+\frac{7}{90}\\&=\frac{16}{90}\\&=\frac{8}{45}\end{aligned}$$

تدريبات:

1- (1) أوجد ناتج:

$a)\,\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=$

$b)\,\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

$c)\,\frac{-3}{8}\times\frac{4}{9}=$

$d)\,\frac{-3}{5}-\left|-\frac{1}{2}\right|=$

$e)\,1\div 3\div 4\div 5=$

$f)\,\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$

$g)\,(-3)\div 4\times 6\div(-5)=$

$\mathrm{h})\,\frac{-6}{35}\div\frac{2}{7}=$

$\mathrm{i})\,(\frac{-1}{2})^5=$

(2) أكتب الأعداد الدورية الآتية على صورة عدد نسبي:

$a)\,0.\overline{2}$ $\quad b)\,0.\overline{37}$ $\quad c)\,1.8\overline{23}$

(3) ادعى ماجد أن القسمة على عدد صحيح تكافئ الضرب في نظيره الضربي. هل تستطيع أن تثبت أو تنفي هذا الادعاء؟

(4) زعم صالح أن بين أي عددين نسبيين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية، كما زعم أن هذه الصفة تسمى كثافة الأعداد النسبية. هل تستطيع أن تعطي مثالاً يؤيد زعم صالح، أو انف بمثال إن وجد.

(5) رتب الأعداد $-\frac{1}{3}$, -0.23, -0.3 تصاعدياً.

الحلول:

(1)

$a)\,\frac{17}{30}$ $\quad b)\,\frac{1}{6}$ $\quad c)\,\frac{-1}{6}$ $\quad d)\,\frac{-1}{10}$ $\quad e)\,\frac{1}{60}$

$f)\,\frac{1}{90}$ $\quad g)\,\frac{9}{10}$ $\quad h)\,\frac{-3}{5}$ $\quad i)\,\frac{-1}{32}$

(2) اكتب الأعداد الدورية الآتية على صورة عدد نسبي:

$$a)\ \frac{2}{9}$$

$$b)\ \frac{37}{99}$$

$$\begin{aligned} c)\ &\frac{18}{10}+\frac{1}{10}\times 0.\overline{23} \\ &=\frac{18}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{23}{99} \\ &=\frac{361}{198} \end{aligned}$$

(3) نعم الادعاء صحيح، فعندما نقسم العدد $\frac{a}{b}$ على العدد $\frac{c}{d}$ فالناتج يساوي $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ أي يساوي الضرب في النظير الضربي للعدد $\frac{c}{d}$.

(4) زعم صالح صحيح، فلنأخذ أي عددين نسبيين مثل $\frac{2}{7},\frac{3}{7}$ يبدو أنهما متقاربين وليس بينهما أي عدد نسبي، والحقيقة غير ذلك، فلو أعدنا كتابتهما على الصورة $\frac{20}{70},\frac{30}{70}$ لبدا بينهما أعداد مثل

$$\frac{21}{70},\frac{22}{70},\ldots,\frac{29}{70}$$

ولو أعدنا كتابتهما على الصورة

$$\frac{200}{700},\frac{300}{700}$$

لبدا بينهما أعداد أكثر، وكلما كتبنا الكسر المكافئ مقامه أكبر ظهرت أعداد أكثر، وبالتالي بينهما عدد لا نهائي من الأعداد النسبية.

(5) الترتيب التصاعدي (من اليسار لليمين): $-\frac{1}{3}, -0.3, -0.23$.

مسائل تحدي:

(1) كم كسر أكبر من $\frac{1}{6}$ وأقل من $\frac{1}{3}$ مقامه يساوي 15؟

(2) قسم سعد العدد N على 8 فحصل على 0.25، بينما ضرب خالد العدد N في 8 .
كم الناتج الذي سيحصل عليه؟

(3) قام هيثم بالجري خارج المنزل. إذا علمت أنه قد أتم قطع $\frac{3}{5}$ النصف الثاني من مشواره. فكم نسبة ما قطعه من المشوار كاملاً؟

(4) أوجد قيمة:

$$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$$

(5) أوجد قيمة:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{79}{80}$$

(6) لدى عادل بطاقة ائتمان بها 14رقم، لو جمعت أي 3أرقام متجاورة (بدءاً من اليسار) لحصلت على مجموع 20. قام بكتابة أرقام بطاقته في الجدول التالي. ما الرقم في مربع الحرف A ؟

A		7									7		4

(7) كم مضاعف للعدد 7 بين العددين 100و 1000؟
(السؤال يكافئ كم مضاعف للعدد 7مكون من ثلاث خانات؟)

(8) في أحد الفصول يوجد 26طالب، 15منهم يأكلون الآيس كريم بالفانيليا، 16منهم يأكلون الآيس كريم بالشوكولاتة، بينما هناك 3طلاب لا يأكلون الآيس كريم بالفانيليا أو الشوكولاتة. كم عدد الطلاب الذين يأكلون الآيس كريم بالفانيليا والشوكولاتة؟

(9) اليوم هو عيد ميلاد كل من ليلى وابنتيها شهد وأمل. بلغت ليلى من العمر 32 عاما، وبلغت شهد من العمر 4 سنوات، بينما بلغت أمل من العمر عاما واحداً. كم سيكون عمر ليلى عندما يكون عمرها مساوياً مجموع عمري شهد وأمل؟

(10) يقال لعدد صحيح موجب أنه "لطيف" إذا كان مكون من 3 خانات ورقم خانة العشرات أقل من كل من رقمي الآحاد والمئات. كم عدد صحيح موجب لطيف؟

(11) لو عرفنا العدد المربع بأنه هو العدد الصحيح الذي ينتج من ضرب عدد صحيح في نفسه (الأعداد المربعة مثل 1 و 4 و 9 و 16 وهكذا ...). ما أكبر عدد صحيح لو أخذنا كل رقمين لخانتين متجاورتين لحصلنا على عدد مربع (مثلاً العدد 364 على شاكلة العدد المطلوب لأن 64 و 36 كلاهما مربع)؟

(12) يعيش عمي بعيداً في مكان منعزل، ورسائله لنا تحتوي دائما على ألغاز. في أحد رسائله حكى لنا أن هناك ثلاثة فرق محلية في منطقته وهي النمل (A) ، النحل (B) ، والقطط (C) تقام بينهم بطولة سنوية بحيث كل فريق يلاعب الآخر مرة واحدة على الأكثر. زعم عمي أن جدول الدوري خلال هذه السنة بدا كما يلي:

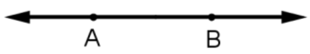
الفريق	لعب	فاز	تعادل	خسر	أهداف له	أهداف عليه
A	1	0	0	1	4	2
B	2	1	1	0	2	2
C	2	1	0	1	3	1

عندما اشتكينا من أن هذا مستحيل، اعترف بأن كل رقم كان خطأ لكنه عذر نفسه لأن كل رقم كان يحتاج إضافة 1 له أو طرح 1 منه. ابحث عن الجدول الصحيح، واشرح بوضوح كيف استنتجت التصويبات.

المستقيمات والزوا

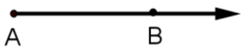
تعاريف

الخط المستقيم

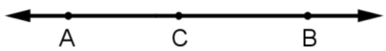


يتكون المستقيم من عدد غير منته من النقاط ويتم تمثيله كما في الشكل وبما أنه يحتوي النقطتين A و B فيمكن التعبير عنه على النحو $\overleftrightarrow{AB}$ أو يمكن تسميته بأحد حروف اللغة، مثل، l.

الشعاع



الشعاع (أو نصف المستقيم) هو عدد غير منته من النقاط لها نقطة بداية وليس لها نقطة نهاية. والشعاع الذي يبدأ بالنقطة A باتجاه النقطة B يرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$.

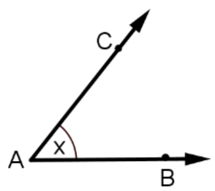


لاحظ أنه إذا كانت النقطة C واقعة بين النقطتين A و B على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإننا نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعاكسان.

القطعة المستقيمة

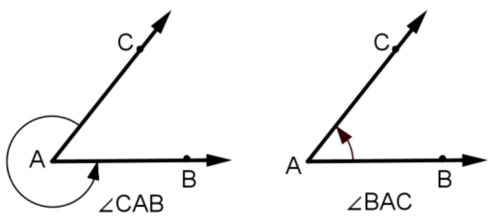
إذا كانت A و B نقطتين على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإن القطعة المستقيمة بين النقطتين A و B يرمز لها بالرمز $\overline{AB}$ وهي مجموعة النقاط الواقعة بين A و B بما في ذلك النقطتين A و B. تسمى النقطتان A و B طرفي القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

الزوا وقياسها

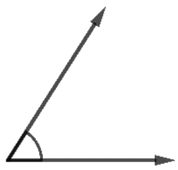


تعرف الزاوية على أنها اتحاد شعاعين يشتركان في نقطة البداية. تسمى نقطة البداية رأس الزاوية ويسمى الشعاعان ضلعي الزاوية. فمثلاً، زاوية رأسها A وضلعاها هما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لاحظ وجود زاوية أخرى ضلعاها $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. متى شئنا التفريق بين هاتين الزاويتين سنتقيد بالحركة عكس عقارب الساعة فنسمي مثلاً الزاوية المرسومة في الشكل $\angle BAC$، ونسمى الأخرى $\angle CAB$.

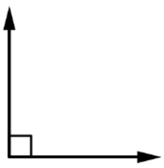


بعض الزوا الخاصة



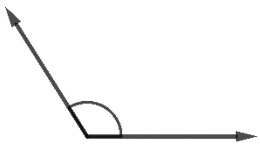
الزاوية الحادة

هي الزاوية التي قياسها أصغر من 90°.



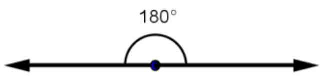
الزاوية القائمة

هي الزاوية التي قياسها يساوي 90° وعادة تمثل الزاوية القائمة كما بالشكل المجاور.



الزاوية المنفرجة

هي الزاوية التي يزيد قياسها عن 90°.



الزاوية المستقيمة

هي الزاوية التي قياسها 180°. كما بالشكل المجاور.

الزاويتان المتتامتان

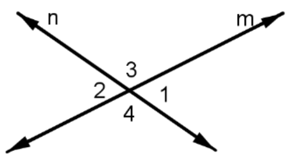
يقال عن زاويتين أنهما متتامتان إذا كان مجموع قياسيهما يساوي 90°.

الزاويتان المتكاملتان

تسمى الزاويتان متكاملتين متى ما كان مجموع قياسيهما يساوي 180°.

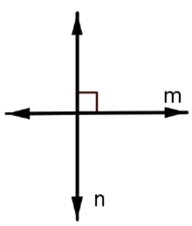
الزاويتان المتجاور ن

هما زاويتان في المستوى تشتركان في ضلع والرأس، ولكنهما لا تشتركان بنقاط داخلية.

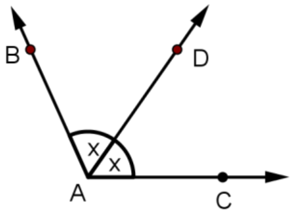


الزاويتان المتقابلتان لرأس

إذا تقاطع المستقيمان n و m كما هو مبين في الشكل فإنه ينشأ عن ذلك عدد من الزوايا. نقول إن الزاويتين 1 و 2 (أو الزاويتين 3 و 4) متقابلتان بالرأس.



وإذا كانت إحدى الزوايا الناتجة عن هذا التقاطع قائمة (ومن ثم جميع الزوايا الأخرى قائمة) فإننا نقول إن المستقيمين متعامدان ونكتب $m \perp n$. ويمكننا أن نستنتج هنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي 360°.



مُنَصِّف الزاوية

نقول إن $\overrightarrow{AD}$ هو منصف الزاوية $\angle BAC$ إذا وقعت D داخل الزاوية $\angle BAC$ وكان $\angle BAD = \angle DAC$.

المستقيمان المتواز ن

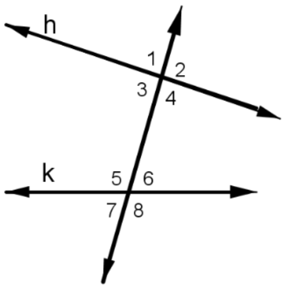
هما المستقيمين غير المتقاطعين أو متخالفين. المستقيمان المتوازيان (||) لا يتقاطعان ويقعان في مستوى واحد أما المتخالفان فهما لا يتقاطعان ولا يقعان في مستوى واحد.

المستقيم القاطع

هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى واحد.

الزاويتان المتبادلتان من الداخل

هما زاويتان غير متجاورتين وفي جهتين مختلفتين من المستقيم القاطع. في الشكل المجاور يوجد زوجان من الزوايا التبادلية داخلياً هما ($\angle 3$ و $\angle 6$) و ($\angle 4$ و $\angle 5$).



الزوا   التبادلية خارجياً

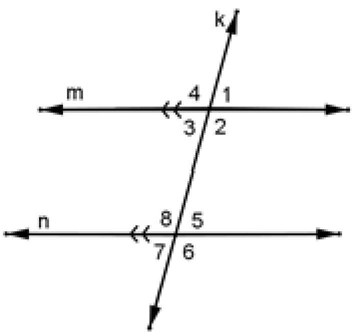
الزاويتان التبادليتان خارجياً هما زاويتان خارجيتان لهما رأسان مختلفان ويقعان على جهتين مختلفتين من القاطع. في الشكل يوجد زوجان من الزوايا التبادلية خارجياً هما ($\angle 1$ و $\angle 8$) و ($\angle 2$ و $\angle 7$).

الزاويتان الداخلتان

هما زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع ($\angle 3$ و $\angle 5$) وكذلك ($\angle 4$ و $\angle 6$).

الزاويتان المتناظر ن

هما زاويتين في جهة واحدة من القاطع أحدهما داخلة والأخرى خارجة. وهم على الشكل أعلاه أزواج الزوايا المتناظرة هي ($\angle 1$ و)، ($\angle 2$ و $\angle 6$)، ($\angle 3$ و $\angle 7$)، ($\angle 4$ و $\angle 8$).



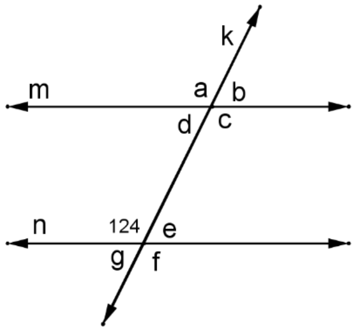
مسلمة (1): إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان. أي أنه إذا كان $m \parallel n$ وكان k قاطع لهما فإن: $(\angle 1 = \angle 5), (\angle 4 = \angle 8)$. $(\angle 2 = \angle 6), (\angle 3 = \angle 7)$.

مسلمة (2): إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت زاويتين متناظرتين متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.

أي أنه كان المستقيم k يقطع مستقيمين وليكونا m,n وكان كذلك. $(\angle 1 = \angle 5)$ أو $(\angle 4 = \angle 8)$ أو $(\angle 2 = \angle 6)$ أو $(\angle 3 = \angle 7)$ فإن $m \parallel n$.

لمثل بالنسبة للعلاقة بين الزوايا الداخلية أو المتبادلة داخليا أو خارجيا.

مثال



على الشكل المجاور:

إذا كان المستقيم m يوازي المستقيم n ويقطعهما المستقيم k ولدينا قياس زاوية واحدة يساوي $124°$. فأوجد قياس الزوايا $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e, \angle f, \angle g$.

الحل:

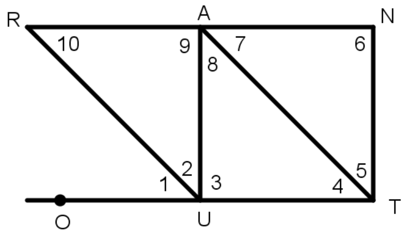
بما أن المستقيم m يوازي المستقيم n ويقطعهما المستقيم k.

إذن:

$\angle a = 124°$	بالتناظر.
$\angle b = 56°$	متجاورتان متكاملتان
$\angle c = 124°$	بالتقابل بالرأس
$\angle d = 56°$	متكاملتان وفي جهة واحدة من القاطع.
$\angle e = 124°$	بالتناظر مع $\angle b$ أو بالتبادل مع $\angle d$
$\angle f = 124°$	بالتناظر مع $\angle c$
$\angle g = 56°$	بالتناظر مع $\angle d$

تدريبات

(1) على الشكل المجاور وباستخدام المعلومات الموضحة عليه، أوجد المستقيمات التي يجب ان تكون متوازية (إن وجدت) في الحالات التالية:



1) $\angle 1 \cong \angle 4$.

2) $m\angle 2 \cong m\angle 10$.

3) $m\angle 5 \cong m\angle 7$.

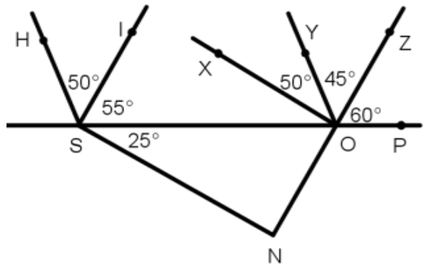
4) $\angle 5 \cong \angle 8$.

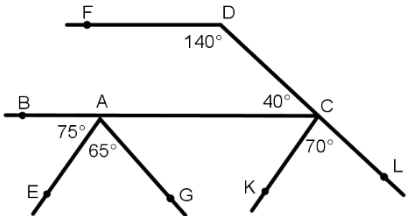
5) $m\angle 6 = m\angle 9 = 90°$.

6) $m\angle 6 = m\angle 3 = 90°$.

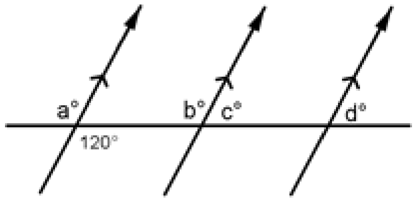
7) $m\angle 7 = m\angle 10 = m\angle 1$.

(2)على الشكلين التاليين أوجد ازواج المستقيمات المتوازية، ثم حدد الزوايا المتطابقة أو المتكاملة التي استخدمتها لذلك.

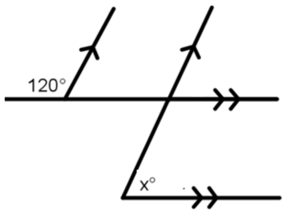




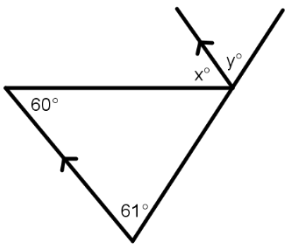
(3) في الشكل المجاور، أوجد قياس $\angle d$.



(4)على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .

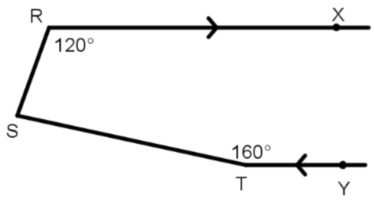


(5)على الشكل المجاور، أوجد قيمة x, y .



(6) على الشكل المجاور: أوجد قياس $\angle RST$

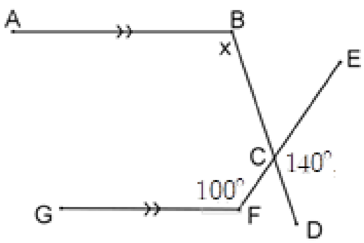
(إرشاد: مستقيم يمر بالنقطة S يوازي $\overline{RX}, \overline{TY}$).

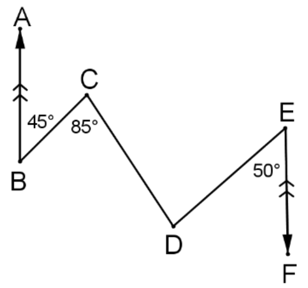


(7) على الشكل المجاور: لدينا $AB \parallel GF$ ،

$\angle ECD = 140°, \angle GFC = 100°$.

أوجد قيمة x

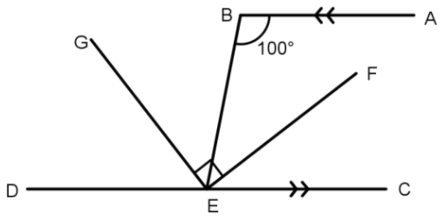




(8)على الشكل: لدينا $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{EF}$ ،

$\angle ABC = 45°, \angle BCD = 85°, \angle DEF = 50°$.

أوجد قياس $\angle CDE$.



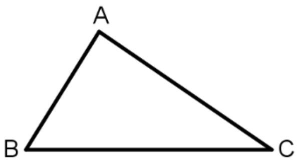
(9)على الشكل المجاور: $AB \parallel DC$ ، $\angle B = 100°$ ،

EF ينصف $\angle BEC$ ، EF عمودي على EG .

أوجد قياس كل من $\angle BEG, \angle DEG$.

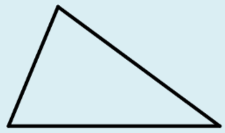
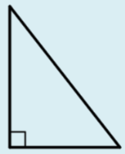
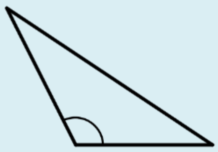
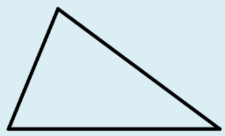
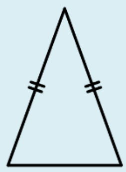
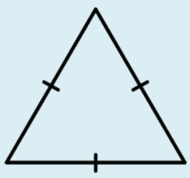
المثلثات

المثلثات من المفاهيم الأساسية في الهندسة وهي حالة خاصة من المضلعات التي سندرسها لاحقا.



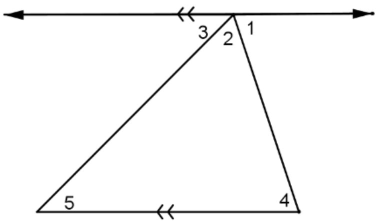
المثلث نرمز له عادة بالرمز $\triangle$ وهو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة تتحدد بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. تسمى النقاط $C\ ,B\ ,A$ رؤوس المثلث والقطع المستقيمة $\overline{AB}\ ,\overline{BC}\ ,\overline{CA}$ أضلاع المثلث وزوايا المثلث هي $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$.

تصنف المثلثات حسب أضلاعها وحسب زواياها:

المثلث الحاد الزوا	المثلث القائم الزاوية	المثلث المنفرج الزاوية
		
هو المثلث الذي تكون جميع زواياه حادة أي أقل من 90 درجة.	هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة (تساوي 90 درجة).	هو المثلث الذي إحدى زواياه منفرجة (أكبر من 90 درجة).
	يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة **الوتر** ويسمى كل من ضلعي القائمة **ساقاً**	
المثلث المختلف الأضلاع	المثلث المتساوي الساقين	المثلث المتطابق الأضلاع
		
هو المثلث الذي أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة.	هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متساويان	هو المثلث الذي تكون جميع أضلاعه متساوية
	الزاويتان المقابلتان للضلعين المتساويين متساويتان أيضاً. يسمى كل من الضلعين المتساويين **ساقاً** ويسمى الضلع الثالث **قاعدة المثلث** كما تسمى الزاوية المقابلة للقاعدة **بزاوية الرأس** وتسمى كل من الزاويتين المتساويتين **بزاوية القاعدة**.	في هذه الحالة تكون جميع زواياه متساوية وقياس كل منها 60°

نظرية:

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة تساوي $180°$.



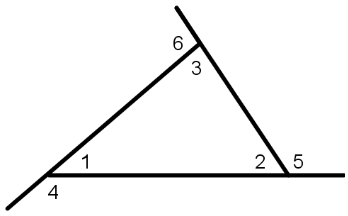
لإثبات ذلك: نرسم مستقيم يوازي أي ضلع في مثلث ويمر بالرأس المقابلة. وبما أن مجموع قياسات الزوايا $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ يساوي $180°$، وبما أن $\angle 1 = \angle 4, \angle 3 = \angle 5$ (بالتبادل). إذن مجموع قياسات الزوايا $\angle 2, \angle 4, \angle 5$ تساوي $180°$.

ملاحظات

- إذا مددنا أحد أضلاع المثلث فتسمى الزاوية التي تنشأ عن ذلك **زاوية خارجة**.
- الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع زوايا المثلث الداخلة عدا المجاورة لها.
- إذا طابقت زاويتين في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثلاثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر.
- إذا تساوت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متساويان والعكس صحيح.
- في أي مثلث لا يمكن أن يكون هناك أكثر من زاوية قائمة أو منفرجة.
- الزاويتين الحادتين في المثلث القائم متتامتان (مجموعهما $90°$).

تدريبات

باستخدام الشكل المجاور أكمل:



(1) إذا كان $m\angle 1 = 40°, m\angle 2 = 60°$، فإن: $m\angle 6 = \underline{\ ?\ }$.

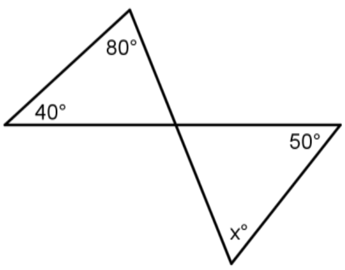
(2) إذا كان $m\angle 1 = 45°, m\angle 3 = 70°$، فإن: $m\angle 5 = \underline{\ ?\ }$.

(3) إذا كان $m\angle 2 = 50°, m\angle 3 = 65°$، فإن: $m\angle 4 = \underline{\ ?\ }$.

(4) إذا كان $m\angle 4 = 135°, m\angle 2 = 60°$، فإن: $m\angle 3 = \underline{\ ?\ }$.

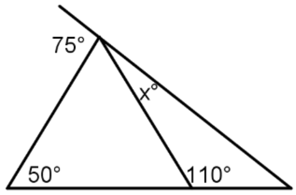
(5) إذا كان $m\angle 5 = 120°, m\angle 1 = 40°$، فإن: $m\angle 3 = \underline{\ ?\ }$.

(6) $m\angle 4 + m\angle 5 + \angle 6 = \underline{\ ?\ }$.

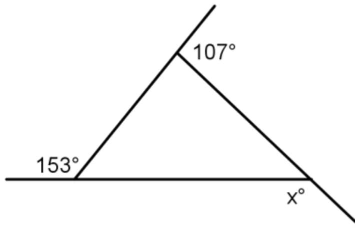


(7) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x.

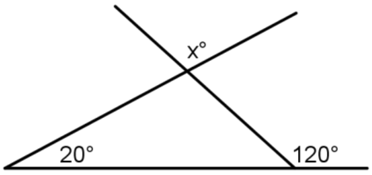
(8) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .



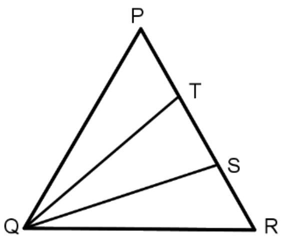
(9) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .



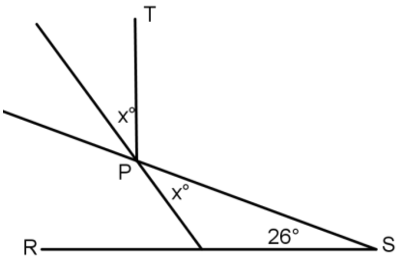
(10) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .

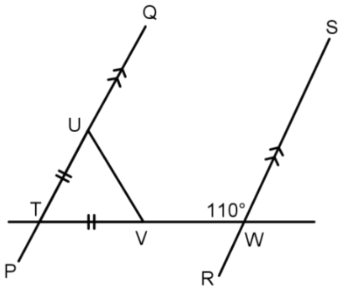


(11) على الشكل المجاور: QPR مثلث متطابق الأضلاع
QT, QS تقسم $\angle PQR$ لثلاثة أجزاء متساوية.
اوجد قياس $\angle QTP$.

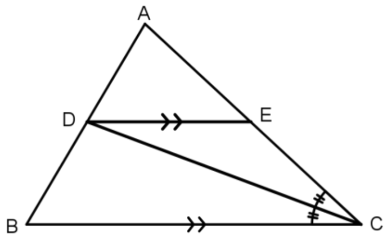


(12) على الشكل المجاور: شعاع من النور يخرج من النقطة
S ، لينعكس عند النقطة P ليخرج في اتجاه النقطة
T بحيث $\overleftrightarrow{RS}$ عمودي على $\overleftrightarrow{PT}$. أوجد قيمة x .

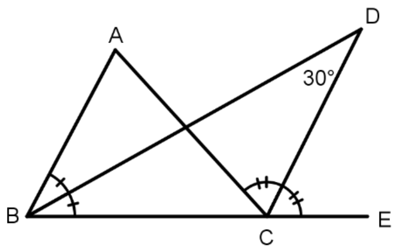




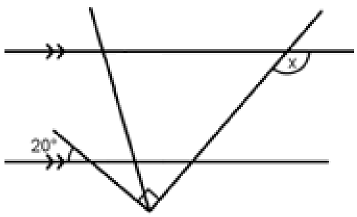
(13) على الشكل المجاور: $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ ، $TU = TV$،
$\angle SWV = 110°$. أوجد $\angle QUV$.



(14) على الشكل المجاور: CD ينصف $\angle ACB$ ،
$\angle ACB = 40°$ $\angle B = 70°$، $DE \parallel BC$.
أوجد قياس كل من $\angle EDC, \angle BDC$.



(15) على الشكل المجاور: منصف $\angle ABC$ ، ومنصف
$\angle ACE$ يتقاطعان في نقطة D . فإذا كان
$\angle BDC = 30°$. أوجد قياس من $\angle A$.

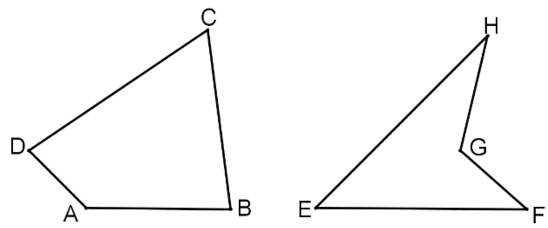


(16)على الشكل: أوجد قيمة x .

المضلعات

يمكن رسم مضلع باستخدام على الأقل أي ثلاث نقاط متتالية ليست على استقامة واحدة. تسمى كل من النقاط **رأساً** وكل من القطع المستقيمة **ضلعاً**. **زوا المضلع** هي الزوايا التي تنشأ عن تقاطع أضلاع متجاورة. **أقطار المضلع** هي القطع المستقيمة بين أي رأسين غير متتاليتين.

يكون المضلع **محد** ً إذا كان قياس أي زاوية داخليه له اقل من $180°$ كما بالشكل $ABCD$.بينما يكون **مقعرا** إذا كانت إحدى زواياه الداخلية أكبر من $180°$ كما بالشكل $EFGH$ ،



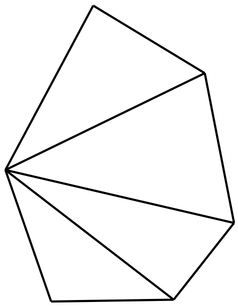
وعليه يمكننا أن نقول إن المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع والرباعي هو مضلع مكون من أربعة أضلاع والخماسي هو مضلع مكون من خمسة أضلاع والسداسي هو مضلع مكون من ستة أضلاع وهكذا.

ملاحظات مهمة

- مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي $(n-2)\times 180°$.

  ولإثبات ذلك اختر أي رأس من رؤوس المضلع وارسم جميع أقطاره من هذه النقطة.

  إن ذلك يقسم المضلع إلى $n-2$ من المثلثات. وبهذا فإن مجموع زوايا المضلع الداخلية هو مجموع زوايا هذه المثلثات وهذا بدوره يساوي $(n-2)\times 180°$.

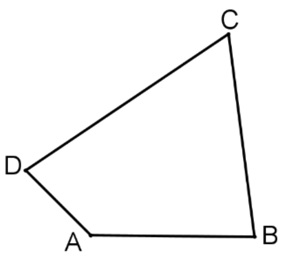


- المضلع المنتظم هو مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وقياس جميع زواياه متساوٍ. ولذا، إذا كان عدد أضلاع (زوايا) المضلع المنتظم هو n فإن قياس كل من زواياه الداخلية يساوي:

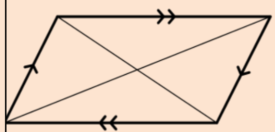
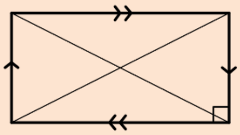
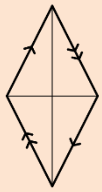
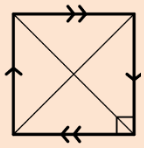
  $$\frac{(n-2)\times 180°}{n}.$$

الر عيات

الرباعي هو مضلع مكون من أربعة رؤوس. أي أن الرباعي $ABCD$ هو اتحاد القطع المستقيمة $\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}$ حيث أي ثلاث نقاط يجب ألا تكون على استقامة واحدة ومجموع قياسات زواياه يساوي $360°$.

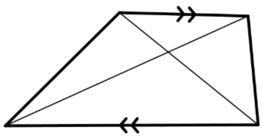


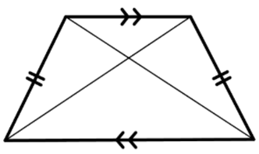
ويمكننا أن نلخص بعض خواص الاشكال الرباعية الخاصة فيما يلي:

الشكل	متوازي الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
				
التعريف	متوازي الأضلاع هو رباعي محدب فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان	هو متوازي أضلاع إحدى زواياه (ومن ثم جميع زواياه) قائمة.	هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان ومن ثم فإن جميع أضلاعه متساوية.	هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان
الأضلاع	كل ضلعين متقابلين متساويين	كل ضلعين متقابلين متساويين	جميع أضلاعه متساوية	جميع أضلاعه متساوية
الزوا	كل زاويتين متقابلتين متطابقتين	جميع زواياه متطابقة وكل منها يساوي 90°	كل زاويتين متقابلتين متطابقتين	جميع زواياه متطابقة وكل منها يساوي 90°
القطران	ينصف كل منهما الآخر	– ينصف كل منهما الآخر. – متساويان في الطول	– ينصف كل منهما الآخر. – متعامدان. – القطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما.	– ينصف كل منهما الآخر. – متساويان في الطول – متعامدان. – القطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما.
المساحة	القاعدة× الارتفاع	الطول ×العرض	القاعدة× الارتفاع	طول الضلع × نفسه
المحيط	مجموع أطوال الأضلاع	(الطول +العرض) × 2	طول الضلع ×4	طول الضلع ×4

كما أنه يوجد شكل آخر يمكن أن نصنفه على أنه شكل خاص وهو شبه المنحرف، وهو شكل رباعي في ضلعين متقابلين فقط متوازيين.

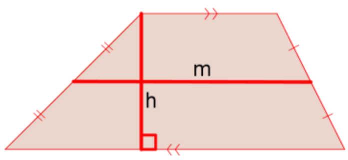
وإذا تطابق ضلعيه الآخرين يسمى شبه منحرف متطابق الضلعين ويتساوى قطراه وتتساوى زاويتي قاعدته.

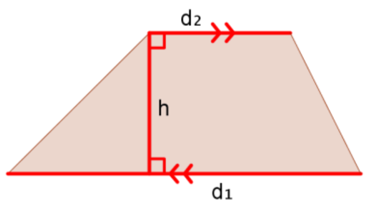




وفي العموم مساحة شبة المنحرف= $A=\frac{1}{2}h(d_1+d_2)$

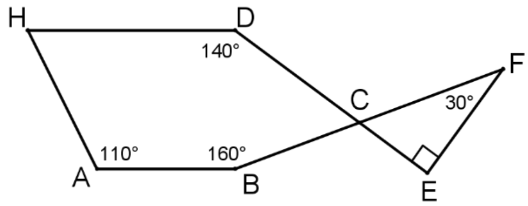
أو القاعدة المتوسطة في الارتفاع ($A=h\cdot m$).





أمثلة

(1) على الشكل أدناه: لدينا المستقيمان DE, BF يتقاطعان في نقطة C، بحيث أن EF عمودي على DE، $\angle HAB = 110°, \angle ABC = 160°$، $\angle HDC = 140°, \angle CFE = 30°$. أثبت أن $AB \parallel HD$.



الحل:

في ΔFEC القائم في $\angle C$، بما أن $\angle CFE = 30°$.

إذن

$$\angle FCE = 180° - (30° + 90°) = 60°.$$

إذن بالتقابل بالرأس

$$\angle DCB = 60°.$$

وبما أن الشكل $ABCDH$ شكلا خماسيا، إذن مجموع قياسات زواياه الداخلة:

$$\begin{aligned} &= (n-2) \times 180° \\ &= (5-2) \times 180° \\ &= 3 \times 180° \\ &= 540° \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} \angle H &= 540° - (110° + 160° + 60° + 140°) \\ &= 540° - 470° \\ &= 70° \end{aligned}$$

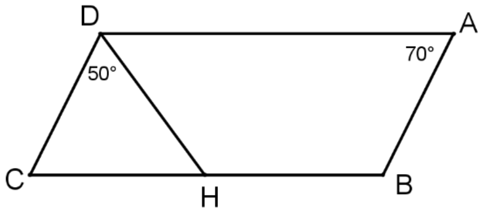
وبما أن

$$\angle H + \angle A = 70° + 110° = 180°.$$

وهما زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع AH، إذن

$$AB \parallel HD.$$

(2)على الشكل: $ABCD$ متوازي أضلاع فيه H تقع على الضلع BC، $\angle A = 70^\circ$، $\angle CDH = 50^\circ$
أوجد قياس $\angle BHD$.



الحل:

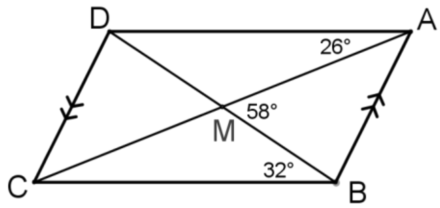
بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع

إذن $\angle C = \angle A = 70^\circ$ (زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع)

وبما أن $\angle DHB$ خارجة عن المثلث DHC، إذن

$$\begin{aligned}\angle DHB &= \angle C + \angle CDH\\ &= 50^\circ + 70^\circ\\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

(3)على الشكل: $ABCD$ رباعي تقاطع قطراه M، $AB \parallel CD$، $\angle AMB = 58^\circ, \angle MBC = 32^\circ$، $\angle CAD = 26^\circ$. أثبت أن $ABCD$ متوازي أضلاع.



الحل:

بما أن $\angle AMB$ خارجة عن المثلث CMB، إذن

$$\angle AMB = \angle MBC + \angle MCB.$$

إذن

$$58^\circ = 32^\circ + \angle MCB \Rightarrow \angle MCB = 26^\circ.$$

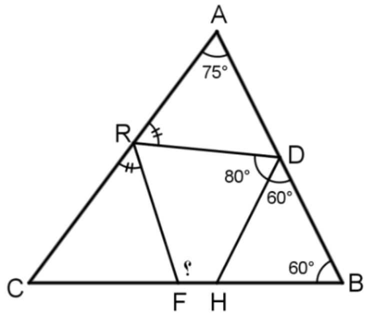
إذن

$\angle CAD = \angle MCB$ وهما في وضع تبادل.

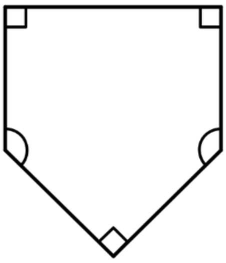
إذن $AD \parallel BC$، وبما أن $AB \parallel CD$

إذن $ABCD$ متوازي أضلاع.

تدريبات



(1)على الشكل: $\triangle ABC$ فيه $\angle BDH = \angle ABC = 60^\circ$
$\angle HDR = 80^\circ, \angle BAC = 75^\circ$، $\angle ARD = \angle FRC$
أوجد قياس $\angle HFR$.

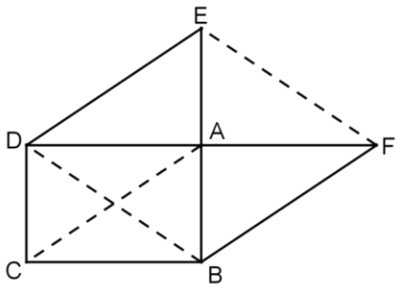


(2) في لعبة البيسبول الأمريكية تمثل قاعدة اللعب شكلا خماسيا (كما بالشكل المجاور) يتكون من ثلاثة زوايا قائمة وزاويتين متطابقتين، أو جد قياس هاتين الزاويتين.

(3) سطحا معين وشبه منحرف متساويان في المساحة فإذا كان طول ضلع المعين 10 وطول القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف 15 فأوجد النسبة بين ارتفاعيهما (القاعدة المتوسطة في شبه المنحرف هي القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين غير المتساويين في شبه المنحرف).

(4) شبه منحرف طول إحدى قاعدتيه المتوازيتين يساوي 3 أمثال طول القاعدة الأخرى فإذا كان ارتفاعه يساوي طول قاعدته لمتوسطة ومساحته 100. أوجد طولا قاعدتيه المتوازيتين.

(5) على الشكل أدناه: $ABCD$ مستطيل، $ACBF, ACDE$ متوازيا أضلاع أثبت أن $EF \parallel BD$.



اختبار تجريبي 1

الزمن المقترح للحل هو 60د.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجا ت المعطاة.

(لا يسمح ستخدام الآلة الحاسبة).

(1) أوجد قيمة

$$\frac{2021+2021+2021+2021+2021}{2021}$$

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
5	8084	2021×5	2021^2	2021

(2) الرمزان ♢، ❖ يمثلان عددين صحيحين موجبين مختلفين أقل من 20 . إذا كان:

$$\text{❖}\times\text{❖}\times\text{❖} = \diamondsuit$$

فما أكبر قيمة للضرب التالي:

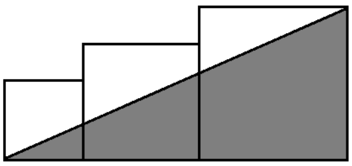
$$\diamondsuit \times \diamondsuit ؟$$

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
225	324	361	400	625

(3) على الشكل المقابل لدينا ثلاث مربعات مساحاتها

على الترتيب: $9cm^2, 16cm^2, 25cm^2$.

أوجد مساحة الجزء المظلل



(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
10	15	20	30	60

(4) تم تقسيم الأعداد $1,2,3,4,5,6,7,8$ إلى مجموعتين، كل منهما يحتوي على 4 عناصر، بحيث مجموع الأعداد في كل من المجموعتين متساو. إذا علم أن $1,3$ في نفس المجموعة. أي عدد موجود أيضا في تلك المجموعة؟

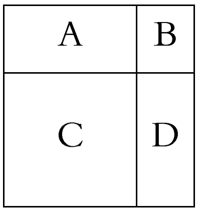
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4	5	6	7	9

(5) كم ناتج:

$$(1+\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot(1-\frac{1}{5})\cdot(1+\frac{1}{6})\cdot(1-\frac{1}{7})\cdot(1+\frac{1}{8})\cdot(1-\frac{1}{9})$$

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{7}{15}$	10

(6) المربع الكبير مقسم إلى 4 أجزاء. B عبارة عن مربع ذي محيط 20 و C أيضاً مربع ذي محيط 80.
أوجد مساحة المربع الكبير.

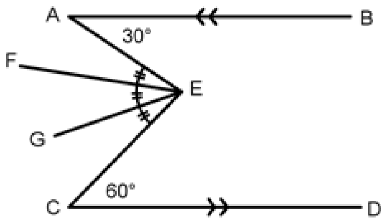


(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
100	144	225	400	625

(7) معطى عددين. إذا طرحنا نصف العدد الأصغر من كلا العددين، فسنحصل على عددين النسبة بينهما تساوي 3 . أوجد النسبة بين العدد الأصغر إلى العدد الأكبر في العددين الأصليين.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

(8) على الشكل AB يوازي CD ، $\angle BAE = 30°$
$\angle DCE = 60°$، EF, EG يقسمان $\angle AEC$
لثلاثة زوايا متساوية في القياس.
أوجد قياس $\angle FEG$ ؟



(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$20°$	$25°$	$30°$	$40°$	$60°$

(9) ما هو أصغر عدد صحيح موجب يمثل حاصل جمع ثلاث أعداد زوجية متتالية موجبة وفي نفس الوقت حاصل جمع عددين فرديين متتاليين موجبين؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
8	12	18	24	44

(10) أراد طارق وصالح وخالد وفهد أخذ صورة تذكارية، ولأن طارق وصالح كانا صديقين مقربين فقد قررا أن يكونا بجوار بعضهما البعض في الصورة، وأراد خالد أن يقف بجوار طارق في الصورة، كم عدد الطرق التي يمكنهم الوقوف بها ليتحقق ذلك؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
7	6	5	4	3

(11) إذا كان: $\Delta + 11 \times \square = 135$ حيث $\Delta < \square$ فإن:

$$\frac{\Delta}{\square} + \frac{\square}{\Delta} =$$

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	4.25	0.25	8	7

(12) العدد الأولي الأصغر من 30 والذي يمكن كتابته كمجموع عددين أوليين هو:

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
29	23	19	17	11

(13) إذا كان x عدد زوجي، y عدد فردي، فأي الأعداد التالية يمثل عدداً فردياً.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$x+y$	$x-y+1$	$x+y+1$	$2x-2y$	$x+2y$

(14) عندما تتبعنا البدايات والتوقفات لمصعد، وجدنا أنه تحرك من الطابق الأول إلى الخامس ثم تحرك إلى الطابق الثاني ومنه تحرك إلى الطابق الرابع ثم إلى الطابق الثالث فإذا كان ارتفاع كل طابق 3 م فما المسافة التي قطعها المصعد؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
51	45	30	27	18

(15) كان لدى الأم إناء كبير سعته 3 لترات مملوء بالعصير. بعد أسبوع وجدت أنه تم استهلاك نصف كمية العصير. ثم تم استخدام ثلثي الكمية المتبقية في آخر يومين. كم لترا من العصير تبقى الآن؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0.15	0.2	0.25	0.5	0.75

(16) أقيم حفل المتفوقين السنوي في مسرح مدرستي الكبير، وكان الصف الأول به 50 مقعداً مرتبة في صف ومرقمة من 1 إلى 50 . جلس أبي في المقعد رقم 17 ، بينما جلست في المقعد رقم 39 . قال لي أبي بعدما رجعنا للمنزل: "لو استطعت أن تحسب عدد المقاعد التي كانت بيني وبينك، سأعطيك ضعف هذا العدد من الريالات". ولأني أحب الرياضيات فقد حسبت عدد المقاعد المطلوب بشكل صحيح. كم ريالًا أعطاها لي أبي؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
42	44	46	4	38

(17) لدينا مربع 3×3 . في كل خلية من خلاياه كتبنا أحد الأعداد الصحيحة من 2 إلى 10. الأعداد في كل صف وكل عمود والقطرين الكبيرين لهما نفس المجموع. بعض أرقام الخلايا ظاهرة بالفعل. أي مما يلي هو الخلايا المفقودة؟

	10	5
8		4
7	2	

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
6 9 3	6 3 9	3 9 6	9 6 3	3 6 9

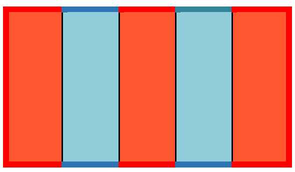
(18) الفرق بين $\frac{1}{3}$ عدد معين و $\frac{1}{4}$ نفس العدد يساوي 3 . ما هو العدد؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
24	36	48	60	72

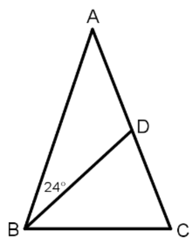
(19) يركض الكلب أسرع مرتين من الأرنب. الأرنب يجري بسرعة خمسة أمثال سرعة السلحفاة. انطلقوا جميعا معا للجري في نفس المسار المستقيم .عندما يركض الكلب مسافة 100 متر، كم عدد الأمتار بين الأرنب والسلحفاة حينئذ؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
5	10	40	50	55

(20) علم إحدى الدول القديمة على شكل مستطيل النسبة بين طوله وعرضه كنسبة 3 إلى 2 ، ومقسم إلى شرائح متساوية العرض. ثلاث شرائح حمراء وشريحتين زرقاء كما بالشكل. ما نسبة الأزرق في محيط العلم؟

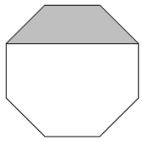


(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
24%	30%	22%	25%	20%



(21) لدينا ABC مثلث فيه $AB = AC$. النقطة D تقع على AC بحيث $BD = BC$. إذا كان قياس $\angle ABD = 24°$. فأوجد قياس الزاوية $\angle ACB$.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
24	44	60	68	72



(22) ثماني منتظم. مساحة المنطقة المظللة هي 3cm^2 . أوجد مساحة الثماني بالسنتيمتر المربع.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
9	10	11	12	15

(23) عندما يجمع حسن أطوال ثلاثة أضلاع من مستطيل فأنه يحصل على ناتج قدره 44 سم، وعندما يجمع عبد الله ثلاثة أضلاع من نفس المستطيل فإنه يحصل على ناتج قدره 40 سم. ما هو محيط هذا المستطيل بالسنتيمترات؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
40	42	44	48	56

(24) إذا رتبنا الأعداد الفردية في صفوف كما بالشكل واستمر هذا الترتيب بنفس الطريقة. أوجد العدد الفردي الذي يتوسط الصف رقم 31 .

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
31	961	1089	1225	1369

انتهت الأسئلة

اختبار تجريبي 2

الزمن المقترح للحل هو 60د.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجا ت المعطاة.

(لا يسمح ستخدام الآلة الحاسبة).

---

(1) ما قيمة المقدار

$$-5-(-5-5)-(-5-(-5-5))$$ ؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0	5	10	15	20

(2) أكل حمزة خمسة أسداس التمر. ما نسبة عدد حبات التمر المتبقية إلى عدد حبات التمر التي أكله حمزة.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$1:2$	$1:3$	$1:5$	$1:6$	$1:9$

(3) بدأ سامي في كتابة قائمة الأعداد الصحيحة الموجبة التي ليست من عوامل العدد**360**، بترتيب تصاعدي.

ما هو العدد السادس في قائمة سامي؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
11	13	14	16	17

(4) لدى أحمد وماجد وجابر **90** قطعة حلوى. يمتلك ماجد عددا من قطع الحلوى تساوي ثلاثة أربا ع عدد قطع الحلوى التي لدى جابر. يمتلك أحمد عددا من قطع الحلوى تساوي ثلثي عدد قطع الحلوى التي لدى ماجد. كم عدد قطع الحلوى التي يمتلكها جابر؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
60	52	48	40	36

(5) في الشكل التالي: تم توصيل كل رأس من رؤوس المربع بمنتصف ضلع في ذلك المربع. ما نسبة مساحة المظلل إلى مساحة المربع؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

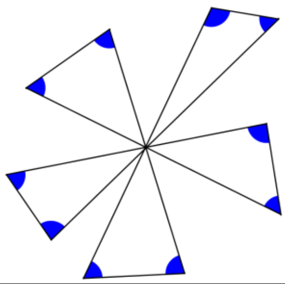
(6) يربي جدي الدجاج والإبل. عاد اليوم من السوق وقال: "لقد بعت 50 حيوانًا، لذا فإن عدد الأرجل في مزرعتي الآن يقل بمقدار 120 رجل عن ذي قبل"! كم عدد الإبل التي باعها جدي؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
10	15	20	25	30

(7) كم ناتج الجمع بالصورة العشرية $\frac{1}{11}+\frac{1}{9}$ ؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0.10	0.20	0.2020	0.202020	$0.\overline{20}$

(8) الشكل التالي يوضح 5 قطع مستقيمة تتقاطع في نقطة واحدة. ما مجموع قياسات الزوايا العشرة المؤشر عليها؟



(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$180°$	$360°$	$540°$	$720°$	$900°$

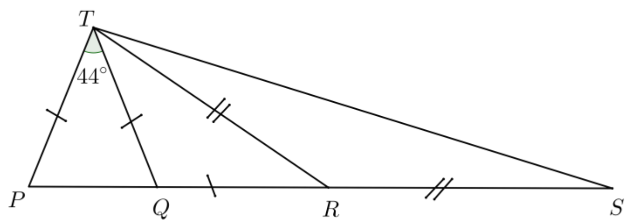
(9) أربعة أعداد صحيحة مختلفة حاصل ضربها يساوي **9**. ما ناتج جمع تلك الأعداد الأربعة؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
-6	0	3	6	9

(10) افترض أنه يعيش 120000 ضب في هضبة نجد، وأن هذا يمثل 75% من إجمالي عدد الضبان التي تعيش في المملكة العربية السعودية. كم عدد الضبان التي تعيش في هضبة نجد أكثر مما تعيش في بقية السعودية؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
30000	40000	60000	80000	90000

(11) في الشكل: $PT = QT = QR$. أيضا $RT = RS, \angle PTQ = 44°$. ما قياس $\angle PTS$ ؟

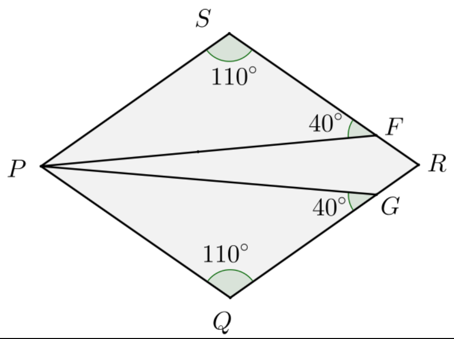


(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$95°$	$97°$	$98°$	$100°$	$108°$

(12) كان لدى خالد كومة من العملات ذات الريالين. قام باستبدال نصف عدد العملات بالضبط بنفس عدد العملات من فئة 10 ريال. أصبح الآن لديه 420 ريالًا. كم ريالًا كان يملكه خالد في البداية؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
42	84	112	140	168

(13) في الشكل: $PS = SR = RQ = QP$. $\angle PQG = \angle PSF = 110°$. وكذلك $\angle PGQ = \angle PFS = 40°$. كم قياس $\angle FPG$ ؟

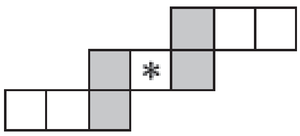


(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$10°$	$15°$	$20°$	$25°$	$30°$

(14) يوجد أكثر من عدد صحيح أكبر من 1 وباقي قسمته على كل من الأعداد الأولية الأربعة الصغرى يساوي 1. ما الفرق بين أصغر عددين صحيحين يحققان ذلك؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
211	210	31	30	7

(15) يجب وضع كل رقم من الأرقام من 1 إلى 9 في خلية مختلفة من الشبكة الموضحة بحيث يكون مجموع الأرقام الثلاثة في كل صف هو 15 . أيضا، يجب أن يكون مجموع الرقمين في كل عمود مظلل15 . كم عدد الاختيارات الموجودة للرقم الذي سيتم وضعه في الخلية المركزية المشار إليها بـ *؟



(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0	1	2	3	4

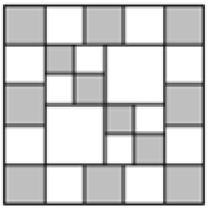
(16) كتبت منال أكبر عدد أولي مكون من رقمين بحيث يكون كل من رقميه عددا أوليا .كتبت سمر أصغر عدد أولي مكون من رقمين بحيث يكون كل من رقميه عددا أوليا. طرحت أمل عدد سمر من عدد منال. ما الجواب الذي حصلت عليه أمل؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
14	20	36	45	50

(17) بدأت بعدد صحيح موجب مكون من ثلاثة أرقام، ثم قسمته على 9 ثم طرحت 9 من ناتج القسمة. الناتج النهائي كان أيضا عددا صحيحا مكونا من ثلاثة أرقام. كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المختلفة التي من الممكن أن يكون قد بدأت بها؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
3	5	7	11	13

(18) تم تقسيم المربع الكبير إلى ثلاثة أنواع من المربعات المختلفة المقاس كما موضح بالشكل التالي. كم نسبة المظلل من المربع الكبير؟

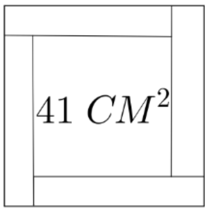


(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
39%	41%	43%	47%	49%

(19) في أحد فصول رياض الأطفال يدرس الجميع الإنجليزية أو الفرنسية، لكن ليس كلتا اللغتين. يدرس ثلث عدد البنات ونفس العدد من الأولاد اللغة الفرنسية. يبلغ عدد الأولاد الذين يدرسون اللغة الإنجليزية مثلي عدد البنات اللاتي يدرسن اللغة الإنجليزية. أي من الخيارات التالية يمكن أن يكون إجمالي عدد الأولاد والبنات في ذلك الفصل؟

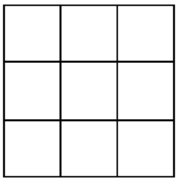
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
28	30	32	33	34

(20) يوضح الشكل أربع مستطيلات متطابقة، محيط كل منها $18cm$، تحيط بمربع مساحته $41cm^2$. ما مساحة كل مستطيل؟



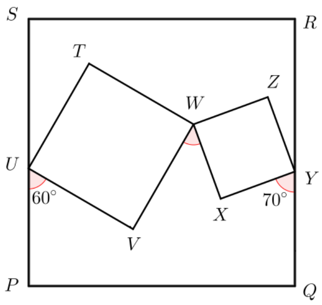
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$8cm^2$	$10cm^2$	$12cm^2$	$14cm^2$	$16cm^2$

(21) الشكل التالي يوضح شبكة 3×3 تحوي تسع مربعات $1cm \times 1cm$ ونستخدم لتكوينها $24cm$ من السلك. ما هو طول السلك المطلوب لتكوين شبكة مماثلة 10×10؟



(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
100	110	121	200	220

(22) يوضح الشكل التالي ثلاث مربعات: $PQRS, TUVW, WXYZ$. الزاويتان PUV, QYX قياسهما $60°, 70°$ على الترتيب. ما قياس الزاوية VWX ؟



(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$40°$	$50°$	$60°$	$65°$	$70°$

(23) يعمل الطلاب في صفي بسرعة كبيرة. يجيب جاسر على أربعة أسئلة كل 30 ثانية ويجيب إبراهيم على خمسة أسئلة كل 40 ثانية. في الأسبوع الماضي، استغرق جاسر ساعة واحدة بالضبط للإجابة على مجموعة كبيرة من الأسئلة. بـكم دقيقة يزيد وقت إبراهيم للإجابة على نفس مجموعة الأسئلة عن وقت جاسر؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	4	$4\frac{1}{2}$

(24) يحضر مروان محاضرة في مدرسة ابنه. هناك 7 صفوف كل منها مكون من 10 كراسي حيث يجلس 46 من الآباء. يلاحظ مروان أن كل أب يجاوره شخص واحد فقط أو لا يجاوره أحد. ما هو أكبر عدد ممكن من الكراسي الفارغة المتجاورة في صف واحد في هذه المحاضرة؟

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
3	5	6	7	8

انتهت الأسئلة

الحلول

الأعداد الصحيحة وخواصها

تدريبات:

(1)

$a)5$ $b)-6$ $c)\ 32$ $d)-64$ $e)\ 25$ $f)\ 0$

$g)32$ $h)-3$ $i)2$ $j)38$ $k)6$ $m)\ -4$

(2)

$a)\ a^{7}$ $b)\ x^{4}$ $c)\ a^{12}$ $d)\ = x^{6}\times x^{20}=x^{26}$

$(e)\ \dfrac{a^{10}}{a^{8}}= a^{2}$ $f)\ \dfrac{a^{9}}{a^{9}}=1$

(3)

$$
\begin{aligned}
(a) &= -7-12+14+15+18+38\\
&= 66\\
(b) &= 25+6+1\\
&= 32
\end{aligned}
$$

أسئلة للتحدي

(1)

$$
\begin{aligned}
&= -1+(\underbrace{1-1+1-1+\ldots\ldots+1-1}_{100term})\\
&= -1+0\\
&= -1
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&= 1234(10000-1)\\
&= 1234\times 10000-1234\times 1\\
&= 12340000-1234\\
&= 12338766
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&= 5\{2a-3-7(4a-1)+20\}-3+8a\\
&= 5\{2a-3-28a+7+20\}-3+8a\\
&= 5\ \ -26a+24\ \ -3+8a\\
&= -130a+120-3+8a\\
&= -122a+117
\end{aligned}
$$

(4) نعلم أن في الأسبوع $24\cdot 7$ ساعة. إذا كانت الدورة الكاملة للقمر تأخذ 7 ساعات، فإن القمر سيدور حول الأرض 24 دورة كاملة.

(5) للحصول على أصغر عدد في أحد أحجار النرد يجب أن يظهر على أحجار النرد الخمسة الأخرى أكبر عدد ممكن. وبالتالي سيتحقق ذلك عندما يظهر على كل من الأحجار الخمسة الأخرى العدد 6 , ومن ثم يظهر أصغر عدد على الحجر السادس وهو العدد 2.

(6) في كتابة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9، يتم استخدام الرقم 2 مرة واحدة،
في كتابة الأعداد الصحيحة من 10 إلى 19، يتم استخدام الرقم 2 مرة واحدة،
بينما في كتابة الأعداد الصحيحة من 20 إلى 29 يستخدم الرقم 2 إحدى عشرة مرة، لذلك، بعد كتابة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 29، يكون قد تم استخدام الرقم 2 ثلاث عشرة مرة. ثم يتم استخدامه 7 مرات عند كتابة الأعداد الصحيحة من 30 إلى 39، من 40 إلى 49 ،...، من 90 إلى 99
إجمالاً سيتم استخدامه 20 مرة.

حل آخر:

في كتابة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9، يتم استخدام الرقم 2 مرة واحدة، الآن باقي الأعداد التي تعنينا مكونة من خانتين، دعنا نحسب عدد مرات ظهور الرقم 2، إذا كان رقم آحاد 2 فإن رقم العشرات يتغير بتسعة طرق، وبالتالي لدينا تسعة أعداد من هذا النوع. إذا كان رقم العشرات 2 فإن رقم الآحاد يتغير بعشرة طرق، وبالتالي لدينا عشرة أعداد من هذا النوع. إجمالاً سيظهر الرقم 2 في مرات عددها $1+9+10=20$.

(7) في كتابة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9، يتم استخدام الرقم 1 والرقم 2 مرة واحدة،
في كتابة الأعداد الصحيحة من 10 إلى 19، يتم استخدام الرقم 1 إحدى عشرة مرة ويتم استخدام الرقم 2 مرة واحدة .بينما في كتابة الأعداد الصحيحة من 20 إلى 29 يستخدم الرقم 2 إحدى عشرة مرة والرقم 1 يستخدم مرة واحدة، لذلك، بعد كتابة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 29، يكون قد تم استخدام كل من الرقمين 1 و 2 ثلاث عشرة مرة. عند كتابة الأعداد الصحيحة من 30 إلى 39 يستخدم الرقم 1 والرقم 2 مرة واحدة
وبذلك بعد كتابة العدد 39 يكون قد تم استخدام كل من الرقمين 1 و 2 أربع عشرة مرة. ومن ثم القيم المحتملة لـ N هي العدد الصحيح التالي الذي يحتوي على رقم 1 وما بعده وفي نفس الوقت تكون القيمة أقل من العدد الصحيح التالي الذي يحتوي الرقم 2. لا يوجد سوى قيمة واحدة للعدد N تفي بالشرط وهي 41.

(8)

$$(1-2)+(3-4)+\ldots+(99-100)+101=$$

$$\left[\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{50\ \text{مرة}}\right]+101=51$$

(9) يوجد 9 أعداد بها صفران وهي: 100و 200و...و 900 .

عندما يكون الرقم المكرر غير صفري فإن العدد يكون على إحدى الصور xxy, xyx, yxx .

عندما $x = 1$ فإن y يمكن أن تأخذ القيم $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ فيصبح لدينا $3 \times 9 = 27$ ، ولكن مهلاً يجب تجاهل العدد 011 ، فيصبح فعلياً لدينا 26 عدد مختلف. بالمثل سيكون هناك 26 عدد مختلف لكل قيمة إضافية للعدد x ، وحيث أن x لها تسع قيم وهي $1, 2, \ldots, 9$ فيصبح إجمالي عدد الأعداد هو:

$9 + 9 \times 26 = 243$.

(10) لا يوجد سوى ساعتين في الفترة يظهر الرقم "5" في خانة الساعات وهي $(05:00 - 05:59)$ و $(15:00 - 15:59)$ ، هناك $2 \times 60 = 120$ توقيت من هذا النوع في كامل الفترة.

في الساعات الـ 22 المتبقية ، لن يظهر في خانة الساعات الرقم "5" ، ولكن سيظهر في خانة الدقائق في كل ساعة في "05" و "15" و "25" و "35" و "45" و "50" إلى "59 دقيقة" ، سيظهر الرقم "5" مرة واحدة على الأقل، وبالتالي هناك 15 مرة في كل من هذه الـ 22 ساعة يظهر الرقم "5" مرة واحدة على الأقل.

لذلك العدد الإجمالي للأوقات المختلفة التي يظهر مرة واحدة على الأقل من الرقم '5' هو:

$$2 \times 60 + 22 \times 15 = 450 .$$

الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية

أسئلة تحدي:

(1) لنأخذ الأعداد المتتالية $n, n+1, n+2$ ، بالتالي مجموعها $3n+3$ ، وهذا المجموع دائماً يقبل القسمة على 3 .

(2) بما أن $2017 = 288 \times 7 + 1$ ، بالتالي يمكننا دفع فقط $288 \times 6 + 1 = 1729$ ريالاً.

(3) عندما نقسم العدد 200400 على 101 سنجد الباقي 16 . وبالتالي نحتاج إضافة 85 ليقبل العدد القسمة على العدد 101 . ومن ثم سيوجد عدد وحيد وهو 200485 ، وبالتالي يجب إضافة 85 على يمين العدد لتحقيق المطلوب.

(4) نعلم أن 0 مضاعف مشترك (لاحظ أنه ليس موجباً) للعدين $5,7$ ، وبالتالي باقي قسمته على كل منهما 0 .
ثم تأتي الأعداد $1,2,3,4$ باقي قسمتها على كل منهما متساوٍ وعددها 4 .
ثم يأتي العدد 5 وهو مختلف في باقي القسمة على كليهما (باقي قسمته على 5 هو 0 بينما باقي قسمته على 7 هو 5 وكذلك الأعداد التالية إلى أن نصل للعدد 35 وهو مضاعف مشترك لكل منهما وبالتالي باقي قسمته على كل منهما 0 ، وتأتي الأعداد $36,37,38,39$ ولها نفس الباقي فنحصل على 5 أعداد متتالية. وهكذا بنفس الطريقة يختلف الباقي للأعداد إلى أن نصل للحزمة الجديدة $70,71,72,73,74$ والتي تتكون من 5 أعداد أيضاً (لاحظ المضاعف المشترك الجديد هو 105 أكبر من 100). وأخيراً عدد الأعداد المطلوب هو $4+5+5=14$ عدداً.

(5) العدد الصحيح $63X904$ مكون من ست خانات وهو مضاعف زوجي للعدد 27 . ما الرقم الذي تمثله X ؟

العدد المعطى مضاعف للعدد 27 ، وبالتالي فهو مضاعف للعدد 9 ، ومن ثم مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9 . ولأن مجموع أرقامه بدون X هو 22 ، فالقيمة الوحيدة ل X التي تجعل المجموع يقبل على 9 هي $X=5$.

(6) عدد مضاعفات العدد 3 الموجبة الأقل من 1000 هي 333 ، عدد مضاعفات العدد 9 الموجبة الأقل من 1000 هو 111 ، مضاعفات العدد 10 الموجبة الأقل من 1000 وتقبل القسمة على 3 هي $(30,60,90,\ldots)$ وعددها 33 . يبدو أن العدد المطلوب هو $333-111-33$ ولكن مهلاً. لقد استبعدنا المضاعفات المشتركة للعددين 9 و 10 مرتين وكان يجب استبعادها مرة واحدة وبالتالي علينا إضافتها مرة أخرى. ولأن المضاعفات المشتركة للعددين 9 و 10 الأقل من 1000 (وهي $90,180,\ldots.$) عددها 11 . إذن العدد المطلوب هو $333-111-33+11=200$

(7) لدينا $7007 = 7^2 \times 11 \times 13 = (7 \times 11) \times (7 \times 13) = 77 \times 91$ (يمكنك التأكد من أنه لا يوجد عددان آخران بشروط السؤال غير 77 و 91). ومن ثم مجموع العددين هو 168.

(8) لأن N أصغر عدد صحيح موجب مجموع أرقام خاناته يساوي 2019 يجب أن يكون لديه أقل عدد ممكن من الخانات (كلما زاد عدد الخانات ستكبر قيمة العدد). حتى نقلل عدد خاناته سنجعل أكبر عدد منها أرقامها 9 وبما أن 2019 تقسيم 9 يساوي 224 والباقي 3 . وبالتالي N سيكون به 225 خانة، 224 اليمنى منها أرقامها 9 بينما الخانة اليسرى رقمها 3. أخيراً العدد $N+1$ يساوي:

$$N + 1 = 3\underbrace{99...9}_{224} + 1 = 4\underbrace{00..0}_{224} \; .$$

ومجموع أرقامه هو 4.

(9) من شرط السؤال نجد "$abcba$" مضاعف للعدد 8، بما أن $abcba = ab \times 1000 + cba$ ومعلوم أن 1000 مضاعف للعدد 8. إذن "cba" مضاعف للعدد 8.

من شرط السؤال أيضا أن "abc" مضاعف للعدد 3، وبالتالي فإن مجموع الأرقام للعددين "abc" و "cba" هو نفسه.

إذن "cba" أيضا مضاعف للعدد 3. وبالتالي "cba" هو مضاعف 24.

أخيرا، من شرط السؤال "$cbabc$" مضاعف للعدد 15. بما أن $c \neq 0$ ، إذن $c = 5$ وبملاحظة أن كل من العددين $cbabc$ و'abc' مضاعف للعدد 3، فإن $c+b$ من مضاعفات 3، وعلاوة على ذلك a مضاعف للعدد 3.

مضاعفات العدد 24 المكونة من ثلاث خانات 4 وهي القيم المحتملة للعدد "cba" (رقم خانة المئات فيها "5") هي 504 528 و 552 و 576 ومن هذه ، فقط 576 لديها $c+b$ كمضاعف للعدد 3.

لذلك العدد الصحيح "abc" هو 675.

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$

مسائل تحدي:

(1) في البداية نلاحظ أن $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ و $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$، وبالتالي أي كسر محصور بينهما على الصورة $\frac{k}{30}$ بحيث k عدد زوجي سيكون مقامه 15. ومن ثم k تأخذ القيم 6 و 8، ولدينا كسران فقط.

(2) نعلم أن $\frac{1}{4}=0.25$ ، وبالتالي N يساوي ربع العدد 8 ومنها $N=2$، وبالتالي يحصل خالد على 16.

(3) بالقطع هيثم قد قطع النصف الأول من المشوار، بالإضافة ل $\frac{3}{5}$ النصف الثاني، وبالتالي قطع إجمالاً $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ من مشواره.

(4) $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

(5) $\frac{1}{80}$

(6)

4	b	7	c	d	e						7		A

لأن مجموع 7 و bو 4 يساوي 20، إذن $b=9$ ، بالمثل نجد $c+7+9=20$ ومنها $c=4$.
بالاستمرار على هذا المنوال من اليمين لليسار نجد $d=9, e=7$. إلى أن نصل إلى $A=9$.

(7) عدد مضاعفات 7 الأقل من 1000 هو خارج قسمة 1000 على 7 (بغض النظر عن الباقي) ويساوي 142، بينما مضاعفات 7 الأقل من 100هو خارج قسمة 100على 7 ويساوي 14.
وبالتالي عدد مضاعفات العدد 7 بين العددين 100و 1000يساوي $142-14=128$.

(8) هناك 3 طلاب لا يأكلون الآيس كريم بالفانيليا أو الشوكولاتة، مما يعني أن هناك $26-3=23$ طالب يأكلون آيس كريم بالفانيليا أو الشوكولاتة. بينما لو جمعنا من يأكلون بالفانيليا مع الذين يأكلون بالشوكولاتة نحصل على $15+16=31$. وهذا غريب لأن العدد الفعلي 23، هناك 8 طلاب زيادة من أين أتوا؟ إنهم الطلاب الذين يأكلون الآيسكريم بالفانيليا والشوكولاتة تم عدهم مرتين. وأخيراً عددهم 8.

(9) عمر ليلي اليوم 32 عاما، ومجموع عمر ابنتيها 5 سنوات. هذا يعني أن الفرق هو 27 عاماً لصالح ليلى. كل سنة يزيد عمر ليلى عاما بينما يزيد مجموع عمري ابنتيها عامين. كل سنة تمر ينقص الفرق بين عمر ليلى ومجموع عمر ابنتيها بمقدار عام. ولأن الفرق الآن 27 عاما فسنحتاج إلى 27 حتى ينعدم الفرق. سيكون عمر ليلى وقتها 59 عاما.

(10) أصغر عدد لطيف هو 101 وأكبر عدد لطيف هو 989 .

بالنظر لرقم خانة العشرات في الأعداد اللطيفة، أصغر رقم لخانة العشرات هو 0 وأكبر رقم هو 8 .

إذا كان رقم العشرات هو 0 فيمكن أن تكون أرقام المئات من 1 إلى 9، ويمكن أن تكون أرقام الآحاد من 1 إلى 9، وبالتالي لدينا 9×9 عدداً لطيفاً.

إذا كان رقم العشرات هو 1، فيمكن أن تكون أرقام المئات من 2 إلى 9 ويمكن أن تكون أرقام الآحاد من 2 إلى 9، وبالتالي لدينا 8×8 عدداً لطيفاً.

بالمثل يمكننا استنتاج إذا كان رقم العشرات 2 لدينا 7×7 عدداً لطيفاً وهكذا....

حتى إذا كان رقم العشرات 8 لدينا 1×1 عدداً لطيفاً.

ومن ثم العدد الإجمالي للأعداد اللطيفة الممكنة هو

$285 = 1\times1+\cdots+8\times8+9\times9$ وهو مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من 1 إلى 9 .

(11) الأعداد المربعة المكونة من رقمين هي 16 و 25 و 36 و 49 و 64 و 81 لو نظرنا للخانات اليسار فيها سنجد فيها الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 8 . هذا يعني أن رقم خانة اليسار للعدد المطلوب سيكون أحد هذه الأرقام.

دعنا ندرس كل حالة لنحصل على أكبر عدد:

- رقم خانة اليسار 1 يستلزم ذلك أن تكون الأرقام على يمينه كالتالي: $1\to6\to4\to9$ ويصبح العدد 1649 .
- رقم خانة اليسار 2 يستلزم ذلك أن تكون الأرقام على يمينه كالتالي: $2\to5$ ويصبح العدد 25 .
- رقم خانة اليسار 3 يستلزم ذلك أن تكون الأرقام على يمينه كالتالي: $3\to6\to4\to9$ ويصبح العدد 3649 .
- رقم خانة اليسار 4 يستلزم ذلك أن تكون الأرقام على يمينه كالتالي: $4\to9$ ويصبح العدد 49 .
- رقم خانة اليسار 6 يستلزم ذلك أن تكون الأرقام على يمينه كالتالي: $6\to4\to9$ ويصبح العدد 649 .
- رقم خانة اليسار 8 يستلزم ذلك أن تكون الأرقام على يمينه كالتالي: $8\to1\to6\to4\to9$ ويصبح العدد 81649 . أخيراً أكبر عدد هو 81649 .

(12) الحد الأقصى لعدد المباريات التي يمكن لأي فريق لعبها هو 2، لأن كل فريقين يلعبان مرة واحدة في السنة على الأكثر وهناك 3 فرق فقط.

لذلك يجب أن يكون الفريق B والفريق C كل منهما لعب مباراة واحدة فقط.

أما الفريق A فقد لعب مباراتين (لأنه لو لعبوا $0\,0$مباراة، فسيكون لديه 0 هدف بينما بشروط السؤال قد سجل 5 أو 3 هدفاً).

نظرا لأن كل رقم سنضيف له أو نطرح منه 1، فإن الفريق A قد فاز بـ. 1 ، وتعادل 1 وخسر 0 (بحيث إجمالي عدد المباريات التي لعبت هو 2).

بما أن الفريق "A" فاز بمباراة واحدة ، خسر الفريق "B" مباراة واحدة (لأن الفريق "B" خسر 0 مباراة في الأصل وفريق C لا يمكن أن يخسر 2 مباريات). لذلك، وبالتالي الفريق B قد فاز وتعادل في 0 مباراة.

نستنتج الآن أن الفريق C تعادل مع الفريق A ، وبالتالي فإن عدد مباريات التعادل له 1 ، بينما فاز وخسر 0 مباراة. نظرا لأن المباراة الوحيدة للفريق C قد انتهت بالتعادل، فإن أهداف الفريق C لصالحه وضده متساوية.

لذلك، أهداف فريق C لصالحه وعليه هي 2 هدفاً.

المباراة الوحيدة للفريق B انتهت بخسارة، لذا فإن أهداف الفريق B هي أكبر من الأهداف التي عليه ويتحقق ذلك عندما يكون له 1 هدفاً وعليه 3 أهداف.

لأن الفريقين (B) و (C) كلاهما لعب مع الفريق (A) فقط، فإن عدد أهداف الفريق (A) يساوي مجموع عدد أهداف التي على كل من الفريقين B و C. وبالتالي فإن عدد أهداف الفريق A هو 5.

وبالمثل، فإن عدد أهداف الفريق A المسجلة عليه هي مجموع عدد أهداف لصالح الفريقين B و C وبالتالي عدد على الفريق A هو 3.

لذلك الجدول الصحيح هو:

الفريق	لعب	فاز	تعادل	خسر	أهدافه	أهداف عليه
A	2	1	1	0	55	3
B	1	0	0	1	1	3
C	1	0	1	0	2	2

المستقيمات والزوا

(1)

1) $\angle 1 \cong \angle 4$. $\Leftarrow AT \parallel RU$

2) $m\angle 2 \cong m\angle 10$. لا يوجد

3) $m\angle 5 \cong m\angle 7$. لا يوجد

4) $\angle 5 \cong \angle 8$. $\Leftarrow AU \parallel NT$

5) $m\angle 6 = m\angle 9 = 90°$. $\Leftarrow AU \parallel NT$

6) $m\angle 6 = m\angle 3 = 90°$. لا يوجد

7) $m\angle 7 = m\angle 10 = m\angle 1$. $\Leftarrow RU \parallel AT, OU \parallel RA$

(2) لنحصل أولا على الزوايا حول النقطتين O, S

1) $\angle XOS = 180° - (60° + 45° + 50°) = 25° = \angle NSO$. $\Leftarrow OX \parallel SN$

2) $\angle YOP = \angle HSO = 105°$. $\Leftarrow OY \parallel SH$.

ومن الواضح أن $FD \parallel AC$ لوجود زاويتين داخلتين متكاملتين.

لنحصل أولا على الزوايا حول النقطتين C, A

1) $\angle ACK = 180° - (40° + 70°) = 70°$. لا يوجد توازي وعليه يمكن استنتاج أن

$\angle ACL = \angle BAG = 140°$. $\Leftarrow AG \parallel CL$

2) $\angle CAG = 180° - (75° + 65°) = 40°$. لا يوجد توازي بناء على قيمة هذه الزاوية.

(3) $\angle a = 120°$ بالتقابل بالرأس. $\angle b = 120°$ تناظر $\angle a$.

$\angle c = 180° - \angle b = 180° - 120° = 60°$

لأن $\angle b + \angle c$ زاوية مستقيمة. إذن، $\angle d = \angle c = 60°$ بالتناظر.

(4) $x = 60°$

(5) من التوازي $x = 60°$ (بالتبادل)، $y = 61°$ (بالتناظر).

(6) بعد الانشاء سوف تنقسم الزاوية لجزئين مجموعهما مكملات الزاويتين $\angle R, \angle T$. ومنها

$\angle RST = (180° - 120°) + (180° - 160°) = 80°$.

(7) يمكن رسم مستقيم يمر بالنقطة C ويوازي كل من AB, GF وباستخدام مفهوم الزاويتين المتقابلتين بالرأس

ومجموع الزاويتين الداخلتين نحصل على $x = 120°$

(8) يمكن رسم مستقيمين متوازيان يمر بالنقطتين C,Dويوازي كل من AB,EF . وباستخدام مفهوم الزوايا المتبادلة نحصل على:

$$\angle CDE = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$$.

(9) من التوازي $\angle BEC = 80^\circ$ ، $\angle BEF = \angle CEF = 80^\circ \div 2 = 40^\circ$. ومنها ومن قياس الزاوية القائمة $\angle BEG = 50^\circ$. ومن علاقة التبادل مع $\angle B$ نحصل على $\angle DEG = 50^\circ$.

المثلثات

(1) 100°

(2) 115°

(3) 115°

(4) 75°

(5) 80°

(6) 360°

(7) $x = 70^\circ$

(8) $x = 45^\circ$

(9) $x = 100^\circ$

(10) $x = 100^\circ$

(11) $\angle QTP = 100^\circ$

(12) $x = 32^\circ$

(13) $\angle QUV = 125^\circ$

(14) $\angle EDC = 20^\circ, \angle BDC = 90^\circ$

(15) $\angle A = 60^\circ$

(16) من المعطيات الواردة في السؤال مع التنويه بأن مجموع زوايا المثلث تساوي 180° يمكن الوصول إلى أن $x = 110^\circ$.

(1) $\angle HFR = 110^\circ$.

(2) قياس كل منهما 135°.

(3) النسبة بين ارتفاع المعين وشبة المنحرف تساوي $10:15$

(4) يمكن بسهولة نجد أن طول القاعدة المتوسطة يساوي طول الارتفاع يساوي 10، وطولي القاعدتين المتوازيتين $5,15$.

(5) بما أن $ACBF$ متوازي أضلاع، إذن

$$AC = FB, AC \parallel FB \qquad (1)$$

بما أن $ACDE$ متوازي أضلاع، إذن

$$AC = ED, AC \parallel ED \qquad (2)$$

من $(1),(2)$:

$FB = ED, FB \parallel ED$، إذن

$DBFE$ متوازي أضلاع ومنها

$$EF \parallel BD.$$

الاختبار التجريبي 1

A	(1)
B	(2)
D	(3)
C	(4)
A	(5)
E	(6)
A	(7)
C	(8)
B	(9)
D	(10)
B	(11)
C	(12)

A	(13)
C	(14)
D	(15)
A	(16)
E	(17)
B	(18)
C	(19)
A	(20)
D	(21)
D	(22)
E	(23)
B	(24)

الاختبار التجريبي 2

A	(1)
C	(2)
E	(3)
D	(4)
C	(5)
A	(6)
E	(7)
D	(8)
B	(9)
D	(10)
A	(11)
D	(12)

A	(13)
B	(14)
C	(15)
E	(16)
A	(17)
B	(18)
C	(19)
B	(20)
E	(21)
B	(22)
D	(23)
C	(24)

المراجع

[1] البركاتي، سلطان سعود، مبادئ أساسية لأولمبياد الرياضيات1 ، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى 1432هـ (2011م).

[2] البركاتي، سلطان سعود، شحاتة، طارق سلامة ،مبادئ أساسية لأولمبياد الرياضيات2 ، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى 1437هـ (2016م).

[3] شحاتة، طارق سلامة صابر، وآخرون رياضيات الأولمبياد " الهندسة"، دار الخريجي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى 1434هـ (2013م).

[4] Atkins WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ,and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 1 (1978-1984), AMT Publishing 2004.

[5] Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Introduction to Geometry:, AoPS Incorporated. 2009

[6] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ,Australian Mathematics Competition (1992-1998), AMT Publishing 2009.

[7] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competition (1999-2005), AMT Publishing 2007.

[8] Batterson J, Competition Math for Middle School, AoPS Inc, 2011.

[9] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems.