وزارة التعليم
Ministry of Education

موهبة
Mawhiba

نسمو
NSMO

أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني "نسمو"

الحقيبة التدريبية لمسار رياضيات 02

مسابقة الفرق الوطنية 2026م

الرياضيات- كبار

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التعليم
Ministry of Education

موهبة
Mawhiba

نسمو
NSMO

الفهرس

مقدمة

أبناؤنا وبناتنا المتفوقين،

نهديكم أسمى التهاني بوصولكم إلى **مرحلة الفرق الوطنية،** التي تمثل أحد أهم المحطات في رحلتكم الرياضية نحو التميز على مستوى المملكة.

في هذه الحقيبة تتعمقون أكثر في دراسة فروع الرياضيات الأربعة: **التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد،** مع موضوعات مثل التباديل والتوافيق، النسب والتشابه، النسبة المئوية والمعادلات الخطية، والأعداد الأولية والعوامل.

تهدف هذه المرحلة إلى تمكينكم من استخدام المفاهيم الرياضية في بناء الحلول المعقدة، وتنمية مهارات التفكير المجرد، والتحليل الدقيق للمسائل.

إنها مرحلة تُظهر فيها روح الفريق الواحد والتعاون العلمي، وتؤهلكم لخوض منافسات أعمق في التفكير الرياضي العالمي.

فكونوا على قدر الطموح، وواصلوا طريق التميز بثقة وإصرار.

الفريق العلمي للأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات (نسمو) – مسار الرياضيات

الوحدة الأولى : الجبـــــــــر

التحليل إلى عوامل

تحليل المقدار الجبري يعني تحويله إلى حاصل ضرب عاملين أو أكثر.

عدد حدود المقدار: حدان جبريان. (بعد إخراج العامل المشترك قد يكون المقدار)	
فرق بين مربعين.	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
فرق بين مكعبين.	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
مجموع مكعبين.	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

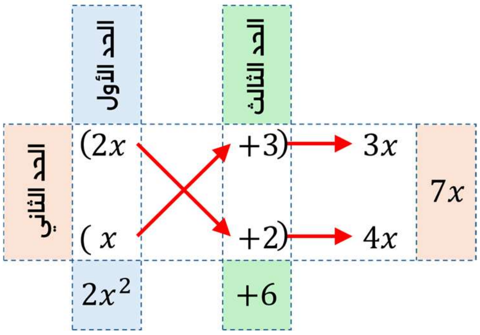
عدد حدود المقدار: ثلاث حدود جبرية. ax^2+bx+c حيث a, b, c ثوابت و $a \neq 0$	
عند $a = 1$	1) يجب قبل البدء في التحليل ترتيب حدود المقدار الثلاثي تنازلياً حسب الرمز المستخدم. 2) يجب البحث عن عامل مشترك بين حدود المقدار الجبري وإخراجه أولاً ثم تحليل المقدار الناتج. 3) إذا كانت إشارة الحد الأخير (موجبة) تكون إشارتا تحليله متشابهتان ومثل الحد الوسط في المقدار الأصلي. $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$ $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ 4) إذا كانت إشارة الحد الأخير (سالبة) تكون إشارتا تحليله مختلفتين ويأخذ أكبرهما عددياً إشارة الحد الأوسط. $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$ $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$
عند $a \neq 0,1$	يحلل المقدار إلى عاملين بحيث: 1) الحد الأول ax^2 يحلل إلى عاملين حاصل ضربهما ax^2 2) يحلل الحد الأخير c إلى عاملين حاصل ضربهما c 3) ناتج (حاصل ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين) = الحد الأوسط bx

مثال 1:

حلل:

$$2x^2 + 7x + 6$$

الحل:



الحد الأول $2x \cdot x = 2x^2$

الحد الثالث $2 \cdot 3 = 6$

الحد الثالث $3x + 4x = 7x$

أي أن:

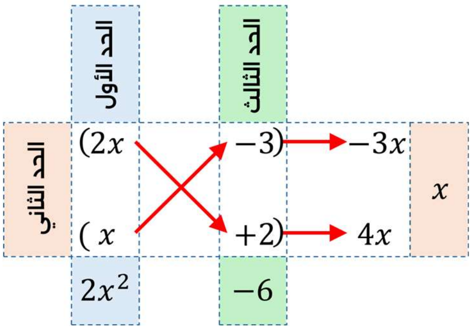
$$2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2)$$

مثال2:

حلل:

$$2x^2 + x - 6$$

الحل:



الحد الأول $2x \cdot x = 2x^2$

الحد الثالث $2 \cdot (-3) = -6$

الحد الثالث $-3x + 4x = x$

أي أن:

$$2x^2 + 7x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

تدريبات:

حلل تحليلًا كاملًا:

1) $x^2 - 8x + 7$	2) $x^2 - 6x - 7$
3) $x^2 - 25$	4) $2x^2 - 50$
5) $x^2 - 13x + 42$	6) $2x^2 + 5x + 2$
7) $x^3 - 1000$	8) $15x^3 + 7x^2 - 2x$
9) $5x^3 - 625$	10) $30x^4 + 5x^3 - 5x^2$
11) $x^2 - 2x + 1$	12) $x^2 + 10x + 25$
13) $6x^3y - 13x^2y + 6xy$	14) $2x^2 + 10x + 12$
15) $12x^2y^2 - 15xy^2 - 63y^2$	16) $24x^3 + 10x^2y - 50xy^2$
17) $9 - 4y^2$	18) $x^{12} - 1$
19) $\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{9}$	20) $y^6 - 81$

متطابقتي مربع مجموع والفرق بين عددين

نعلم أنه إذا كان a, b عددين حقيقين فإن:

مربع مجموع حدين:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع الفرق بين حدين:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال 1:

عندما يريد ماجد تربيع أي عدد ينتهي بالرقم 5 فهو يستخدم الخطوات التالية:

1. يحذف الرقم 5 في نهاية العدد ليحصل على العدد k.
2. يضرب k في $k+1$، ثم يضيف في نهاية الناتج الرقمين 25.

على سبيل المثال عند حساب 65^2 فإنه يضع $6 \times 7 = 42$ وأمامها 25 فيكون الجواب:

$$65^2 = 4225$$

كيف يكون ذلك صحيحًا؟

الحل:

$$65^2 = (60+5)^2 = 60^2 + 10 \times 60 + 25 = 60(60+10) + 25 = 60 \times 70 + 25$$
$$= 4200 + 25 = 4225$$

وبنفس الطريقة لو استخدم مربع الفرق بين حدين.

$$65^2 = (70-5)^2 = 70^2 - 10 \times 70 + 25 = 70(70-10) + 25 = 70 \times 60 + 25$$
$$= 4200 + 25 = 4225$$

هل يمكنك حساب 105^2 بنفس الطريقة؟

تدريبات:

(1) في كل مما يلي أكمل الفراغ بحيث يصبح المقدار مربع كامل:

$(a)\ x^2 - 6x + \cdots$
$(b)\ x^2 + 7x + \cdots$
$(c)\ x^2 - 0.4x + \cdots$
$(d)\ x^2 - \cdots + 42.25$

(2) أوجد مفكوك ما يلي:

$(a)\ (y+5)^2$
$(b)\ (3z+8)^2$
$(c)\ (x-6)^2$
$(d)\ (-2y+9)^2$
$(e)\ (-x-9y)^2$
$(f)\ (2r-\frac{2}{r})^2$

(3) أوجد قيمة l في المعادلة:

$$5l^2 - 20l = 0$$

(4) أوجد قيمة l في المعادلة:

$$l^2 - 144 = 0$$

(5) أوجد قيمة w في المعادلة:

$$29 = (w-2)^2 - 7$$

(6) أوجد قيمة v في المعادلة:

$$94 - 5(v-3)^2 = 14$$

(7) أوجد قيمة e في المعادلة:

$$3(4+e)^2 - 40 = 68$$

(8) أوجد قيمة m في المعادلة:

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

(9) أوجد قيمة l في المعادلة:

$$a^2 + 36 = 12a$$

(10) أوجد قيمة t في المعادلة:

$$t^2 + 8t - 20 = 0$$

(11) أوجد قيمة h في المعادلة:

$$\frac{3(h-3)}{2}=\frac{27}{2h-6}$$

(12) أوجد قيمة x في المعادلة:

$$\frac{3x-6}{2}=\frac{27}{8x-16}$$

(13) أوجد قيمة t في المعادلة:

$$y^2+12y+32=0$$

(14) إذا كان $x-y=8$ وَ $xy=-15$ فأوجد قيمة كل من:

$a)\ x^2+y^2$ $\quad b)\ (x+y)^2$ $\quad c)\ x^4+y^4$

(15) إذا كان

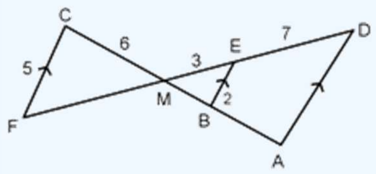
$x=2025^{1447}-2025^{-1447}$ وَ $y=2025^{1447}+2025^{-1447}$

فأوجد x^2-y^2.

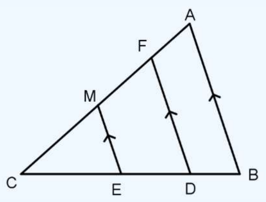
الوحدة الثانية : الهندســـة

تدريبات مراجعة

(1) على الشكل المجاور $AD \parallel BE \parallel FC$.استخدم الأطوال الموضحة على الرسم لإيجاد أطوال $\underline{ADMB}$، $\underline{BA}$ $\overline{MF}$ ،



(2) على الشكل المجاور $ME \parallel FD \parallel AB$ ، وكذلك لدينا $AF: FM: MC = 2: 3: 5$. فإذا كان $AF = 4ED = 7.5$ ، أوجد طول كل من $\underline{AC}, \underline{BD}, \underline{EC}$.

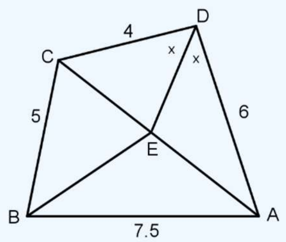


(3) المثلث ABC أطوال أضلاعه $\underline{CA}, \underline{BC}, \underline{AB}$ على الترتيب تساوي $4,5,6$، تم تنصيف $\angle A$ بمنصف لاقى $\underline{BC}$ في D. أوجد طول كل من $\underline{DC}, \underline{BD}$.

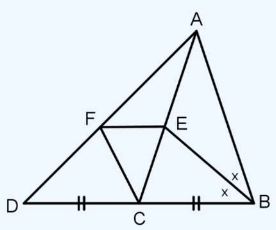
(4) المثلث ABC أطوال أضلاعه $\underline{CA}, \underline{BC}, \underline{AB}$ على الترتيب تساوي $9,5,6$، تم تنصيف $\angle A$ الخارجية بمنصف لاقى $\overleftrightarrow{BC}$ في D. أوجد طول كل من $\underline{DC}, \underline{BD}$.

(5) المثلث ABC فيه X منتصف $\underline{BC}$، تم تنصيف $\angle AXB$ بمنصف لاقى $\underline{AB}$ في D ، وتم تنصيف $\angle AXC$ بمنصف لاقى $\underline{AC}$ في E. أثبت ان $\underline{DE} \parallel \underline{BC}$.

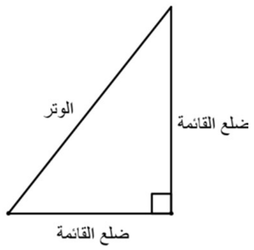
(6) على الشكل المجاور $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overrightarrow{DE}$ ينصف $\angle ADC$ ، باستخدام الأطوال الموضحة على الشكل أثبت أن $\overrightarrow{BE}$ ينصف $\angle ABC$.



(7) على الشكل المجاور ABC مثلث فيه $AB = AC$ ، رسمت D على امتداد BC بحيث $BC = CD$ إذا كان $\overrightarrow{BE}$ ينصف $\angle ABC$ $EF \parallel BD$ ، . أثبت أن $\overrightarrow{CF}$ ينصف $\angle ACD$.



نظرية فيثاغورس* وتطبيقاتها



في هذا الموضوع سنتحدث عن المثلثات القائمة بشكل عام وعن نظرية فيثاغورس بشكل خاص. أما المثلث القائم فهو مثلث إحدى زواياه تساوي $90°$ ونطلق على الضلع المقابل لها وتر المثلث القائم أما الضلعين الاخرين فيسميا ضلعي القائمة. أما نظرية فيثاغورس فتتحدث عن العلاقة بين الأضلاع الثلاثة في المثلث القائم الزاوية.

نظرية 1 **:(نظرية فيثاغورس).**

في المثلث القائم الزاوية الذي طولي ضلعي القائمة فيه a, b ووتره c ، مجموع مربعي ضلعي القائمة يساوي مربع الوتر أي أن:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

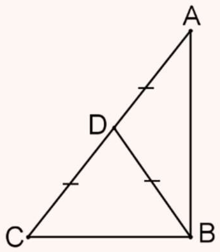
نظرية 2 **:(عكس نظرية فيثاغورس).**

في أي مثلث أطوال اضلاعه a, b, c يحقق العلاقة $a^2 + b^2 = c^2$ فإن هذا المثلث يكون قائم الزاوية عند الزاوية المقابلة للضلع c.

نظرية 3 **:**

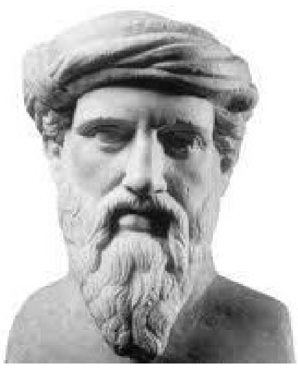
يكون المثلث قائما إذا كان طول أحد متوسطات المثلث يساوي نصف طول الضلع الواصل إليه ويكون هذا الضلع هو وتر المثلث.

$(AD = BD = CD \Rightarrow \angle C = 90°)$.



* فيثاغورس كان فيلسوفًا وعالم رياضيات يونانيًا عاش تقريبًا بين عامي 570 و495 قبل الميلاد. وُلد في جزيرة ساموس اليونانية، وتنقّل كثيرًا بين عدة مناطق، منها اليونان ومصر، وربما الهند.

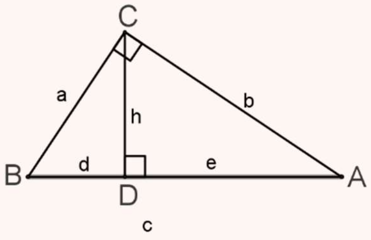
حوالي عام 530 قبل الميلاد، استقرّ في المستعمرة اليونانية كروتون في إيطاليا، حيث أسّس مدرسة خُصّصت لمناقشة الموضوعات العلمية والرياضية. وفي شبابه، رحل عبر بلاد ما بين النهرين (سوريا والعراق حاليًا)، وقضى وقتًا في الدراسة في مصر. وبعد عقدين من السفر والدراسة المكثفة، تمكّن فيثاغورس من استيعاب جميع المعارف الرياضية التي كانت معروفة لدى الحضارات الكبرى في ذلك العصر.



نظرية 4 :

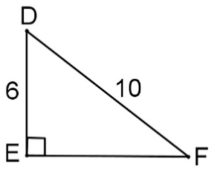
في المثلث القائم الزاوية الذي طولي ضلعي القائمة فيه a, b ووتره c ، والقائم في $\angle C$ وارتفاعه من القائمة على الوتر $DC = h$ وكانت $DB = d$, $DA = e$. فإن:

$$a^2 = dcb^2 = ech^2 = edhc = ab$$

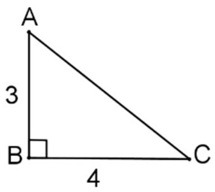


أمثلة:

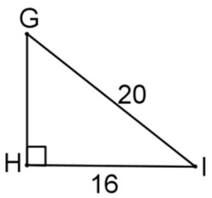
أوجد طول الضلع المجهول في المثلثات التالية



$$EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$



$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

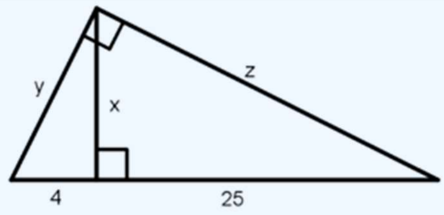


$$GH = \sqrt{GI^2 - HI^2} = \sqrt{144} = 12$$

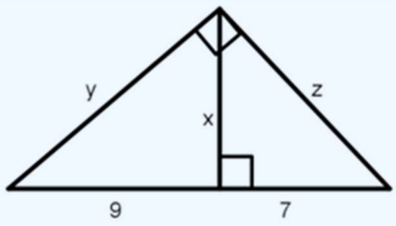
تدريبات :

في التدريبات $(1-7)$ أوجد قيمة x, y, z.

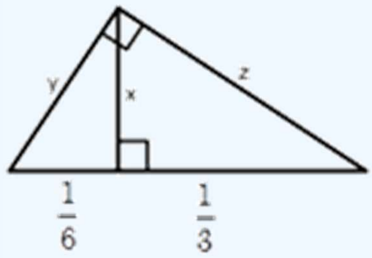
(1)



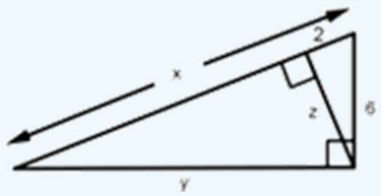
(2)



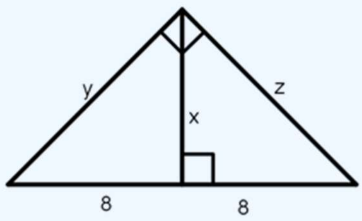
(3)



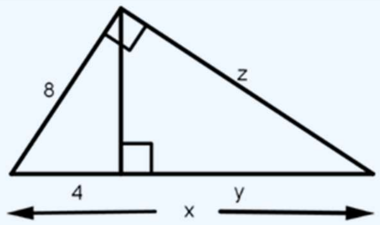
(4)



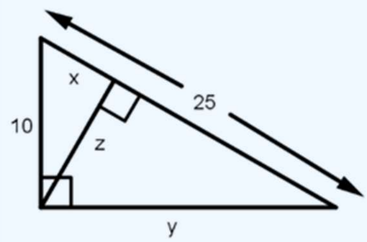
(5)



(6)



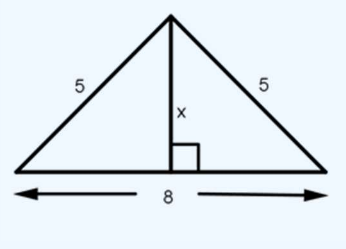
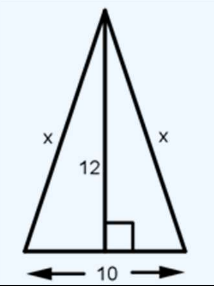
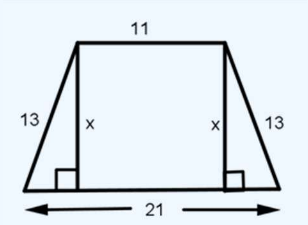
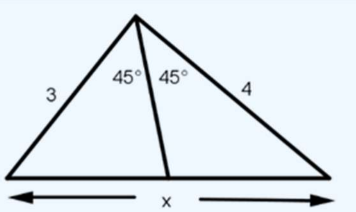
(7)



في التدريبات $(8-11)$ إذا علمت طول قطر المربع فأوجد طول ضلعه.

(8)	2	(9)	10	(10)	$20k$	(11)	$7n\sqrt{2}$

في التدريبات (15 – 12) أوجد قيمة x.

(12)		(13)	
(14)		(15)	

المثلثات الخاصة

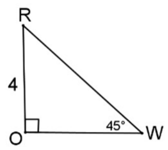
نظرية 5 :
في المثلث قائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $30°$ يساوي نصف طول الوتر،

وطول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $60°$ يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ من طول الوتر.

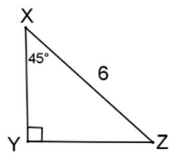
نظرية 6 :
في المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $45°$ يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ من طول الوتر .

أمثلة:

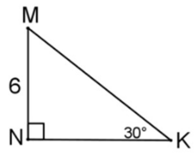
أوجد طول الضلع المجهول في المثلثات التالية



$$OW = 4, RW = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$



$$YZ = YX = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{2}$$

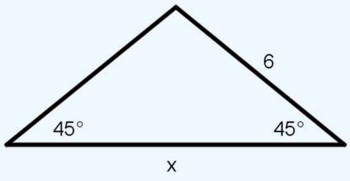


$$MK = 12, NK = \sqrt{144-36}$$
$$= 6\sqrt{3}$$

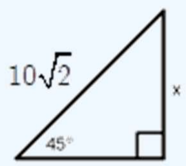
تدريبات :

في التدريبات $(1-7)$ أوجد قيمة x

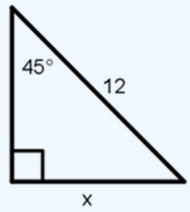
(1)



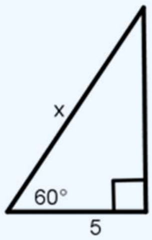
(2)



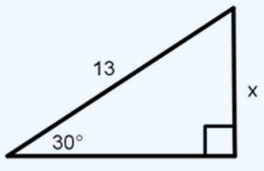
(3)



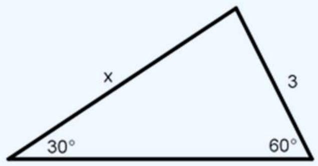
(4)



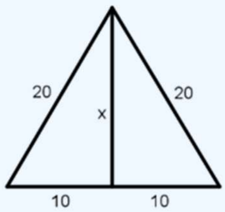
(5)



(6)

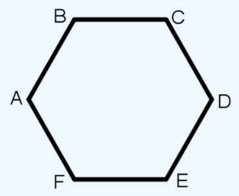


(7)

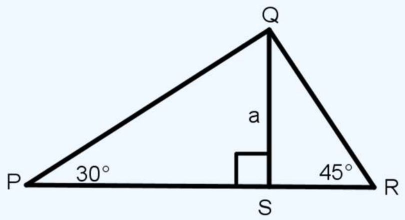


(8) على الشكل المجاور: $ABCDEF$ سداسي منتظم طول ضلعه 8 .

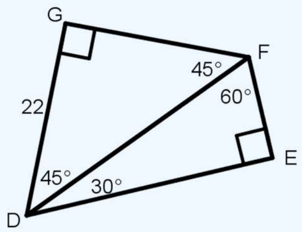
أوجد طول AC, AD.



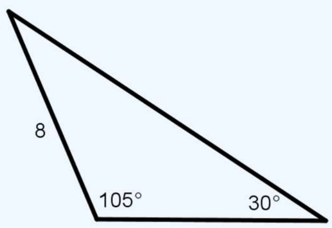
(9) على الشكل المجاور: أوجد طول PQ, PS, QR بدلالة a



(10) على الأشكال التالية أوجد أطوال القطع المجهولة إذا كان ذلك ممكننا

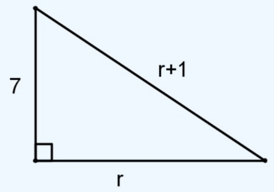


(11) على الشكل المجاور: أوجد طول محيط المثلث



تمارين تحدّي

(1) على الشكل المجاور أوجد r



(2) المثلث القائم ABC فيه $\angle A = 90^\circ$ ، $AB = AC$ ، إذا كانت النقطة D تقع على الضلع BC. اثبت أن $BD^2 + CD^2 = 2AD^2$.

(3) إذا كان محيط مثلث قائم الزاوية يساوي 30 سم ومساحته 30 سم مربع. فأوجد أطوال أضلاع المثلث.

(4) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90^\circ$ ، AD المنصف الداخلي للزاوية A يقطع BC في D ،

إذا كان $BD : DC = 5 : 3$ ، $AC = 9$ ، $AB = 15$. فأوجد المسافة من D إلى AB.

(5) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90^\circ$ ، $AC = 6$ ، $BC = 12$ ، إذا كان العمود المنصف للضلع AB يقطع AB, BC في D, E على الترتيب. فأوجد طول CE.

(6) في المستطيل $ABCD$ لدينا $CE \perp DB$ عند E ، $BE = \frac{1}{4} BD$ ، $CE = 5$ ، فأوجد طول AC.

(7) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90^\circ$ ، إذا كانت النقطة D منتصف الضلع AC ، أثبت أن $AB^2 + 3BC^2 = 4BD^2$.

(8) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90^\circ$ ، إذا كانت النقطتان E, D تقعان على AC, BC على الترتيب،

أثبت أن $AD^2 + BE^2 = AB^2 + DE^2$

الوحدة الثالثة : نظرية الاعداد

تدريبات للمراجعة

(1) أي من الأعداد التالية أولي: 73 و 91 و101و 143 و 199.

(2) ليكن p,q عددين أوليين مختلفين. أوجد عدد القواسم المختلفة لكل من الأعداد التالية:

$A)\ pq$ $\quad B)\ p^2q$ $\quad C)\ p^2q^2$ $\quad D)\ p^nq^m$

(3) اثبت أن حاصل ضرب أي ثلاثة أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 6.

(4) اثبت أن حاصل ضرب أي خمس أعداد طبيعية متتالية:

a) يقبل القسمة على 30.

b) يقبل القسمة على 120.

(5) أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $n!$ يقبل القسمة على 660

(6) كم عدد الأصفار المتجاورة ابتداءً من رقم الآحاد التي توجد في التمثيل العشري للعدد $10!$؟

(7) ليكن n عدد طبيعي. هل يمكن أن يكون هناك 5 أصفار متجاورة بالضبط إبتداءاً من رقم الآحاد في التمثيل العشري للعدد $n!$ ؟

(8) أوجد كل الحلول الطبيعية للمعادلة:

$$x^2 - y^2 = 33$$

القاسم المشترك الأكبر (gcd)

تعريف:

إذا كان a, b, c أعداد طبيعية بحيث $a \times b = c$ ، فيقال أن a يقسم c ونرمز لها $a|c$ أيضاً، $b|c$ ، كما يقال أيضًا العددين a, b قاسمان (أو عاملان) للعدد c بينما يقال أن العدد c مضاعف للعددين a, b.

تعريف:

القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a, b هو أكبر عدد يقسم كلا العددين a, b

ولكن كيف نحسب القاسم المشترك الأكبر للعدين a, b عمليًا؟

مثال 1:

احسب $gcd\ (6,8)$

الحل:

نحسب قواسم العددين 6 و8 كالتالي:

$$d_6 = \{1,2,3,6\} d_8 = \{1,2,4,8\}$$

ثم نحسب القواسم المشتركة لهما وهي

$$d_6 \cap d_8 = \{1,2\}$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 6 و8 هو 2.

طريقة أخرى لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين:

ربما نستغرق وقتًا ليس بالقصير لإيجاد كل قواسم عدد إذا كان العدد كبيرًا، لذا تكون الطريقة التالية هي الأفضل في حالة الأعداد الكبيرة. سنوضحها في المثال التالي.

مثال 2 :

احسب $gcd\ (36,48)$

الحل:

نقوم بتحليل العددين لعواملهما الأولية كالتالي :

36	2
18	2
9	3
3	3
	1

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
	1

ويصبح لدينا

$36 = 2^2 . 3^2$ ،

$48 = 2^4 . 3$

وبالتالي

$gcd\ (36,48) \ = 2^2 . 3 = 12$.

تدريبات:

احسب:

(1)$gcd\ (8,9)$

(2)$gcd\ (54,96)$

(3)$gcd\ (35,91)$

(4)$gcd\ (6,54)$

(5)$gcd\ (199,256)$

(6)إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين n و 120 يساوي 24. فأي مما يلي يمكن أن يكون تحليلًا للعدد n ؟

$A)\ 2 \times 3^3$ $B)\ 2^2 \times\ 3^3$ $C)\ 2^3 \times 3^2 \times 11$ $D)\ 2^4 \times 3^3 \times 5$

المضاعف المشترك الأصغر(lcm)

تعريف:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين (a, b) هو أصغر مضاعف لكلا العددين (a, b).

مثال 1:

احسب $lcm\ (6,8)$

الحل:

نحسب مضاعفات العددين 6 و 8 كالتالي:

$$m_6 = \{6,12,18,24,30,36,42,48,......\} m_8 = \{8,16,24,32,40,48,....\}$$

ثم نحسب القواسم المشتركة لهما وهي

$$m_6 \cap m_8 = \{24,48,72,......\}$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6 و8 هو 24.

طريقة أخرى لحساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

لاحظ أن مضاعفات أي عدد طبيعي هي مجموعة غير منتهية، ربما ليس نواجه كتابة مضاعفات كثيرة جداً للعددين حتى نحصل على المضاعفات المشتركة. لذا تكون الطريقة التالية هي الأفضل في حالة الأعداد الكبيرة. سنوضحها في المثال التالي.

مثال 2:

احسب $lcm\ (36,48)$

الحل:

نقوم بتحليل العددين لعواملهما الأولية كالتالي :

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
	1

36	2
18	2
9	3
3	3
	1

ويصبح لدينا (c) ، وبالتالي

$$lcm(36,48) = 2^4 . 3^2 = 144$$

تدريبات (2):

احسب:

$lcm\ (8,9)$(1)

$lcm\ (54,96)$(2)

$lcm\ (35,91)$(3)

$lcm\ (6,54)$(4)

$lcm\ (199,256)$(5)

(6) إذا كان المضاعف المشترك الأصغر للعددين n و 20 يساوي 180. فأي مما يلي يمكن أن يكون تحليلًا للعدد n ؟

$A)\ 2 \times 3^3$ $B)\ 2^2 \times 3^2$ $C)\ 2^3 \times 3^2$ $D)\ 2^4 \times 3^3 \times 5$

قاعدة مهمة:

إذا كان a, b عددين طبيعيين ، d هو القاسم المشترك الأكبر لهما، m هو المضاعف المشترك الأصغر لهما، فإن:

$m.d = a.b.$

مثال 1:

إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين n و 8 يساوي 2 المضاعف المشترك الأصغر لهما هو 24. فما قيمة n ؟

الحل:

$$8n = 2 \times 24$$

$$\Longrightarrow 8n = 48 \Longrightarrow n = 6$$

العدد المربع الكامل:

هو عدد صحيح موجب كل قواسمه الأولية قواها زوجية.

مثلاً:

العدد A صيغته الأولية على الصورة $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_n^{\alpha_n}$ فإن A مربع كامل إذا وفقط إذا كان:

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ أعداد زوجية.

مثال 2:

أي الأعداد التالية مربع كامل:

$$144,\ \ 128,\ \ 1024,\ \ 360$$

الحل:

بالتحليل نجد أن 144,1024 قوى عواملها الأولية زوجية فهي مربعات كاملة، بينما 128,360 بعض قوى عواملها الأولية فردية (وضح بنفسك)!

تدريبات :

(1) إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين n و 18 يساوي 6، المضاعف المشترك الأصغر لهما هو 36. فما قيمة n ؟

(2) أي الأعداد التالية مربع كامل:

$$196,\ 192,\ 169,\ 240$$

(3) **تحدي:** هل يمكن لعدد صحيح موجب مكون من 300 خانة بها 100 صفر، 100 واحد، 100 اثنين أن يكون مربعاً كاملاً؟

(4) **تحدي:** أثبت أن العدد الذي عدد قواسمه فردية يجب أن يكون مربعاً كاملاً.

(5) **تحدي:** أثبت لأي عددين صحيحين موجبين $d(a,b)$ ، هو القاسم المشترك الأكبر لهما، m هو المضاعف المشترك الأصغر لهما، فإن $m.d = a.b$.

الوحدة الرابعة : التركيبـــــات

خواص التباديل

التباديل مع التكرار

(1) أوجد عدد تبديلات حروف الكلمة $PARALLEL$؟

في التدريب السابق، نلاحظ تكرار بعض الكلمات عند استخدام اسلوب التباديل العادي، لأن ترتيب الحرف A الأول والثاني لا يُحدث فرقًا فعليًا وكذلك مع حرف L .

التباديل مع التكرار:

عدد التباديل لأشياء عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 مرة والثاني r_2 والثالث r_3 يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3!}$$

تدريبات :

(2) كم عدد طرق إعادة ترتيب حروف الكلمة التالية $abcaadbddd$؟

(3) كم عدد طرق إعادة ترتيب أرقام العدد 456733727؟

(4) لدينا الأرقام التالية 1,2,3,1,4,5,5

(a) كم عدد الأعداد الممكن تكوينها من ترتيب جميع الأرقام السابقة

(b) كم عدد الأعداد الممكن تكوينها من ترتيب جميع الأرقام السابقة بشرط أن تبدأ وتنتهي بالرقم 5؟

(5) كم عدد الكلمات المتكونة من حروف الكلمة $SAUD$ ؟

(6) بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حروف كلمة $SALMAN$؟

(7) بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حروف كلمة $ARABIA$ بشرط أن يكون الحرف B بين حرفين A (ليست بالضرورة متجاورة).

(8) كم عدد الكلمات المختلفة المكونة من حروف كلمة $ELEMENTARY$ والتي تظهر فيها حروف E الثلاث متجاورة؟

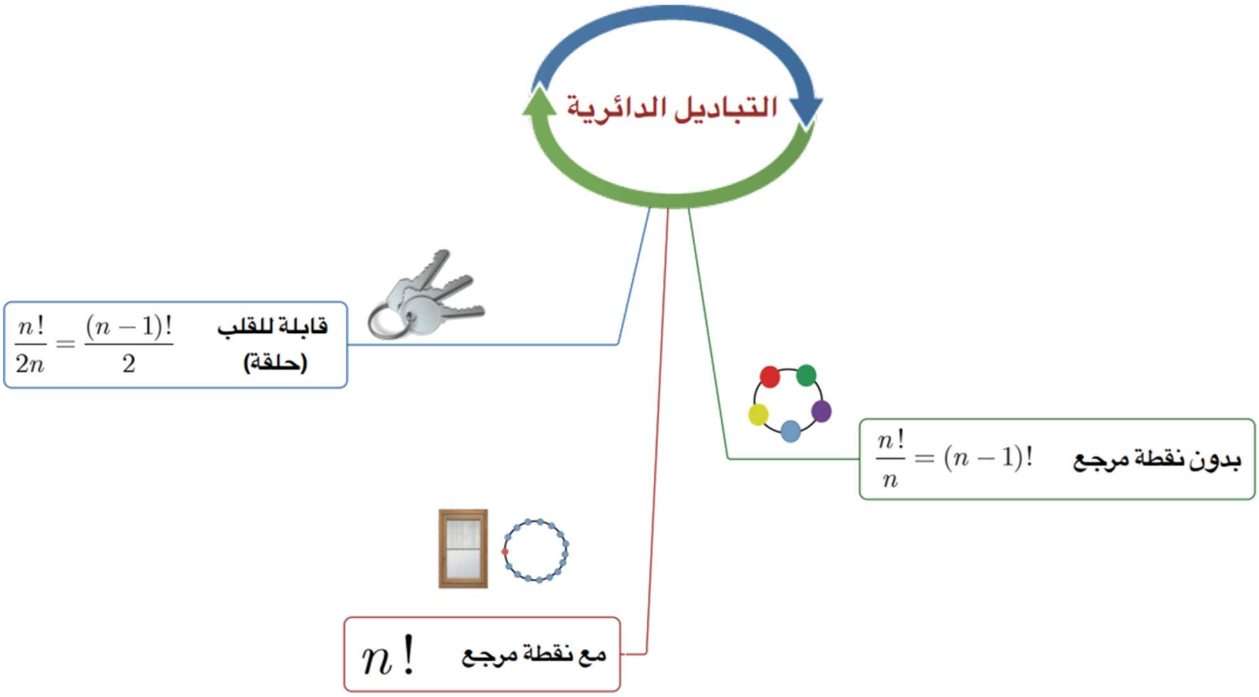
(9) كم عدد الثلاثيات المرتبة من الأعداد الصحيحة الموجبة (a, b, c) بحيث أن حاصل ضربها $a \times b \times c = 231$

التباديل الدائري

(10) بكم طريقة يمكن ترتيب خمس علب بهارات (ملح، زنجبيل، كمون، فلفل، زعتر) على شكل دائري؟

التباديل الدائري: عدد التباديل المختلفة لn من الاشياء مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$



تدريبات:

(11) بكم طريقة يمكن ترتيب: 5 أشياء حول دائرة؟ 7 أشياء حول دائرة؟ n من الأشياء حول دائرة؟

(12) بكم طريقة يمكن أن يجلس ثمانية اشخاص حول طاولة مستديرة بحيث أحد الكراسي باللون الأحمر والبقية باللون سوداء؟

(13) بكم طريقة يمكن ترتيب:

a) 36 شخص حول دائرة؟

b) 7 لاعبين على شكل دائرة بحيث أن أحدهم خلف الحكم؟

(14) بكم طريقة يمكن جلوس 5 طلاب حول طاولة مستديرة؟ وبكم طريقة يمكن ذلك إذا كان أحد الكراسي أسفل النافذة؟

(15) سلسلة دائرية تحتوي على أنواع مختلفة من الخرز، كم عدد السلاسل المختلفة التي نستطيع تكوينها من 13 خرزه:

a) إذا لم يسمح بقلب السلسلة؟

b) إذا كان قلب السلسلة مسموح؟

(16) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط ألا يجلس مهندسان جوار بعضهما البعض؟

(17) بكم طريقة يمكن تجليس 7 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط ألا يجلس طبيبان جوار بعضهما البعض؟ وبكم طريقة يمكن ذلك إذا لم يسمح بجلوس مهندسان بجوار بعضهما؟

التوافيق

التوافيق: عدد طرق اختيار r من الأشياء من مجموعة بها n من الاشياء بدون مراعاة الترتيب وبدون تكرار

يساوي $\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$ ويرمز لهذا العدد بالرمز $_nC_r$ أو $\frac{n}{k}$

(18) يرغب 5 من أعضاء الفريق السعودي في اختيار 2 منهم عشوائيا لتكوين لجنة نظام. بكم طريقة يمكنهم عمل ذلك؟

خواص التوافيق و التباديل

أحسب ما يلي وأكتب ملاحظاتك

$(6)!$ (a و $2!+4!$ $_7P_3$ (b و $\frac{7!}{4!}$ $_8P_3$ (c و $3!\cdot\binom{8}{3}$ (d $\binom{8}{3}$ و $\binom{8}{5}$

ملاحظة: من الفقرة a) في المثال السابق نجد أن $(2+4)! \neq 2!+4!$

لنستنتج أن العبارة $n!+m! \neq (n+m)!$ ليست صحيحة دائما.

ومن الفقرات b, c, d نلاحظ تساوي بين المقادير :

$$_7P_3 = \frac{7!}{4!} \text{ ؛ } {}_8P_3 = 3!\cdot\binom{8}{3} \text{ و } \binom{8}{5} = \binom{8}{8-5} = \binom{8}{3}$$

وسنجد لاحقاً أن هذه العلاقات صحيح دائماً لأي عددين صحيحين موجبين m, n بحيث $m \le n$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$_nP_m = m!\cdot\binom{n}{m}$$

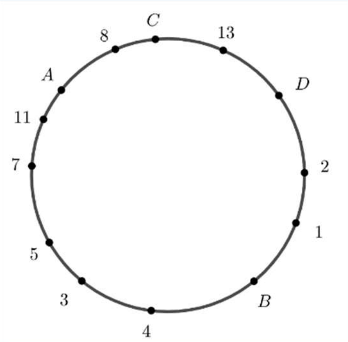
$$n! = n\cdot(n-1)!$$

تدريبات:

(19) كم عدد الكلمات المختلفة الناتجة من إعادة ترتيب حروف كلمة $ELEMENTARY$ والتي لا يظهر فيها أي حرفين E متجاورين؟

(20) كم عدد الكلمات المختلفة المكونة من 10 حرف تحوي فقط الحرفين E و F بحيث يكون عدد حروف E أكثر من عدد حروف F في الكلمة؟

(21) تم تسمية نقاط على محيط دائرة كما في الشكل. سوف نرسم اوتار في الدائرة بشرط أن:



1- نرسم وتر بين أي نقطتين أسم كل منها حرف.

2- نرسم بين أي نقطتين أسم كل منها عدد فردي.

3- نرسم بين أي نقطتين أسم كل منها عدد زوجي

كم عدد الوتار الممكن رسمها؟

(22) بكم طريقة يمكن تقسيم 8 طلاب إلى:

a) مجموعتين متمايزتين في كل منها 3 طلاب ويبقى طالبين لا نضعهما في أي مجموعة؟

(ملاحظة المجموعات غير متمايزة في الاربع فقرات التالية)

b) مجموعتين في كل منها 4 طلاب؟

c) أربع مجموعات من طالبين؟

d) مجموعة من أربع طلاب ومجموعتين من طالبين؟

e) مجموعة من أربع طلاب ومجموعة من ثلاث طلاب ويتبقى طالب لا نضعه في أي مجموعة؟

(23) يريد اسامة ان يجلس مع عشرة من أصدقائه حول دائرة مستديرة. كم عدد الازواج المختلفة من أصدقاء اسامة يمكن أن يجاوروه؟

حلول التدريبات

حلول (الجبر)

التحليل إلى عوامل:

تدريبات:

(1)

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$$

(2)

$$x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$$

(3)

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

(4)

$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x - 5)(x + 5)$$

(5)

$$x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x - 6)$$

(6)

$$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$$

(7)

$$x^3 - 1000 = x^3 - 10^3 = (x - 10)(x^2 + 10x + 100)$$

(8)

$$15x^3 + 7x^2 - 2x = x(15x^2 + 7x - 2) = x(5x - 1)(3x + 2)$$

(9)

$$5x^3 - 625 = 5(x^3 - 125) = 5(x^3 - 5^3) = 5(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

(10)

$$30x^4 + 5x^3 - 5x^2 = 5x^2(6x^2 + x - 1) = 5x^2(2x + 1)(3x - 1)$$

(11)

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$$

(12)

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$$

(13)

$$6x^3y - 13x^2y + 6xy = xy(6x^2 - 13x + 6) = xy(3x - 2)(2x - 3)$$

(14)

$$2x^2+10x+12=2(x^2+5x+6)=2(x+3)(x+2)$$

(15)

$$12x^2y^2-15xy^2-63y^2=3y^2(4x^2-5x-21)=3y^2(x-3)(4x+7)$$

(16)

$$24x^3+10x^2y-50xy^2=2x(12x^2+5xy-25y^2)=2x(4x-5y)(3x+5y)$$

(17)

$$9-4y^2=3^2-(2y)^2=(3-2y)(3+2y)$$

(18)

$$x^{12}-1=(x^6-1)(x^6+1)=(x^3-1)(x^3+1)((x^2)^3+1)$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

(19)

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{9}=\left(\frac{a^2}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{36}(3a^2-2)(3a^2+2)$$

(20)

$$y^6-81=(y^3)^2-9^2=(y^3-9)(y^3+9)$$

متطابقتي مربع مجموع والفرق بين عددين:

(1)

في كل بند نضيف الحدّ المناسب ليصبح المقدار **مربعًا كاملًا** باستخدام قاعدة:

$$x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$$

$$(a)\ x^2 - 6x + 9$$

$$(b)\ x^2 + 7x + \frac{49}{4}$$

$$(c)\ x^2 - 0.4x + 0.04$$

$$(d)\ x^2 - 13x + 42.25$$

(2)

$(a)\ (y+5)^2 = y^2 + 10y + 25$

$(b)\ (3z+8)^2 = 9z^2 + 48z + 64$

$(c)\ (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$

$(d)\ (-2y+9)^2 = 4y^2 - 36y + 81$

$(e)\ (-x-9y)^2 = x^2 + 18xy + 81y^2$

$(f)\ (2r - \frac{2}{r})^2 = 4r^2 - 8 + \frac{4}{r^2}$

(3)

$$5l^2 - 20l = 0$$

$$\Longrightarrow 5l(l-4) = 0$$

$$\Longrightarrow 5l = 0 \quad or \quad l - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow l = 0 \quad or \quad l = 4$$

(4)

$$l^2 - 144 = 0$$

$$\Longrightarrow l^2 - 12^2 = 0$$

$$\Longrightarrow (l-12)(l+12) = 0$$

$$\Longrightarrow l - 12 = 0 \quad or \quad l + 12 = 0$$

$$\Longrightarrow l = \pm 12$$

(5)

$$29 = (w-2)^2 - 7$$

$$\Longrightarrow (w-2)^2 = 36$$

$$\Longrightarrow w-2 = 6 \qquad or \qquad w-2 = -6$$

$$\Longrightarrow w = 8 \qquad or \qquad w = -6$$

(6)

$$94 - 5(v-3)^2 = 14$$

$$\Longrightarrow 5(v-3)^2 = 80$$

$$\Longrightarrow (v-3)^2 = 16$$

$$\Longrightarrow v-3 = 4 \qquad or \qquad v-3 = -4$$

$$\Longrightarrow v = 7 \qquad or \qquad v = -1$$

(7)

$$3(4+e)^2 - 40 = 68$$

$$\Longrightarrow 3(4+e)^2 = 108$$

$$\Longrightarrow (4+e)^2 = 36$$

$$\Longrightarrow 4+e = 6 \qquad or \qquad 4+e = -6$$

$$\Longrightarrow e = 2 \qquad or \qquad e = -10$$

(8)

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$\Longrightarrow (m-3)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow m - 3 = 0$$

$$\Longrightarrow m=3$$

(9)

$$a^2 + 36 = 12a$$

$$\Longrightarrow a^2 - 12a + 36 = 0$$

$$\Longrightarrow (m-6)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow m - 6 = 0$$

$$\Longrightarrow m = 6$$

(10)

$$t^2 + 8t - 20 = 0$$

$$\Longrightarrow (t-2)(t+10) = 0$$

$$\Longrightarrow t-2 = 0 \qquad or \qquad t+10 = 0$$

$$\Longrightarrow t = 2 \qquad or \qquad t = -10$$

(11)

$$\frac{3(h-3)}{2} = \frac{27}{2h-6}$$

$$\Longrightarrow (h-3)(h-3) = \frac{2 \cdot 27}{2 \cdot 3}$$

$$\Longrightarrow (h-3)^2 = 9$$

$$\Longrightarrow h-3 = 3 \qquad or \qquad h-3 = -3$$

$$\Longrightarrow h = 6 \qquad or \qquad h = 0$$

(12)

$$\frac{3x-6}{2} = \frac{27}{8x-16}$$

$$\Longrightarrow (x-2)(x-2) = \frac{2 \cdot 27}{8 \cdot 3}$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Longrightarrow x-2 = \frac{3}{2} \qquad or \qquad x-2 = -\frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{7}{2} \qquad or \qquad x = \frac{1}{2}$$

(13)

$$y^2 + 12y + 32 = 0$$

$$\Longrightarrow (y+8)(y+4) = 0$$

$$\Longrightarrow y+8 = 0 \qquad or \qquad y+4 = 0$$

$$\Longrightarrow y = -8 \qquad or \qquad y = -4$$

(14)

إذا كان $x - y = 8$ وَ $xy = -15$ فأوجد قيمة كل من:

$a)\ x^2 + y^2 \qquad b)\ (x+y)^2 \qquad c)\ x^4 + y^4$

$a)\ (x-y)^2 = 8^2$

$\Longrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 64$

$\Longrightarrow x^2 - 2(-15) + y^2 = 64$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 64 - 30 = 34$

$b)\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\Longrightarrow\ (x+y)^2 = x^2 + 2(-15) + y^2$

$\Longrightarrow\ (x+y)^2 = x^2 + y^2 - 30$

$\Longrightarrow\ (x+y)^2 = 34 - 30 = 4$

$c)\ (x^2 + y^2)^2 = 34^2$

$\Longrightarrow x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = 34^2$

$\Longrightarrow x^4 + y^4 = 1156 - 450 = 706$

(15)

أولًا نحسب:

$$x - y = 2025^{1447} - 2025^{-1447} - 2025^{1447} - 2025^{-144} \ = -\frac{2}{2025^{1447}}$$

ثانيًا نحسب:

$$x + y = 2025^{1447} - 2025^{-1447} + 2025^{1447} + 2025^{-1447} = 2 \cdot 2025^{1447}$$

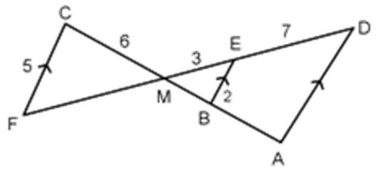
$$\because x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$\therefore x^2 - y^2 = \left(-\frac{2}{2025^{1447}}\right)(2 \cdot 2025^{1447}) = -4$$

حلول (الهندسة)

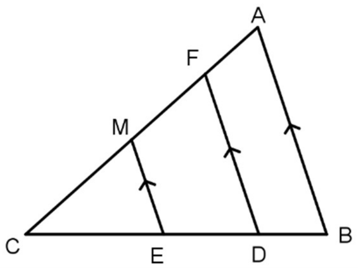
حلول تدريبات المراجعة:

(1)



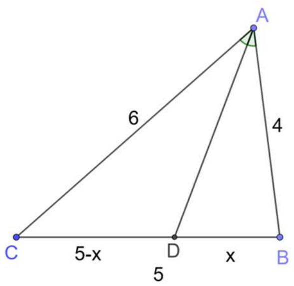
$$\frac{ME}{MF}=\frac{EB}{FC}\Longrightarrow MF=\frac{5\times3}{2}=7.5\ \frac{MB}{MC}=\frac{EB}{FC}\Longrightarrow MB=\frac{6\times2}{5}=2.4\ \frac{ME}{ED}=\frac{MB}{BA}\Longrightarrow BA=\frac{7\times2.4}{3}=5.6\ \frac{BE}{AD}=\frac{ME}{MD}\Longrightarrow AD=\frac{2\times10}{3}=\frac{20}{3}$$

(2)



$$\frac{MC}{EC}=\frac{MF}{ED}\Longrightarrow CE=\frac{5\times7.5}{3}=12.5\ \frac{AF}{DB}=\frac{MF}{ED}\Longrightarrow DB=\frac{2\times7.5}{3}=5\ \frac{AF}{AC}=\frac{2}{10}\Longrightarrow AC=\frac{4\times10}{2}=20$$

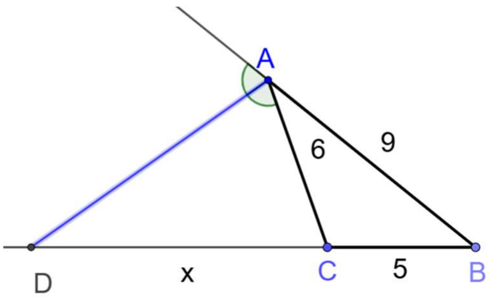
(3)



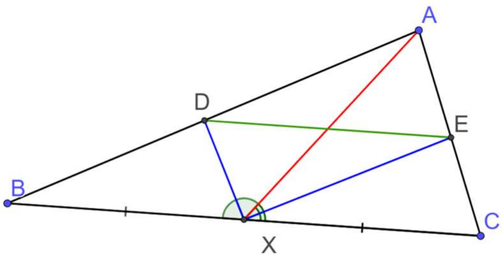
$$\frac{4}{6}=\frac{BD}{DC}\Longrightarrow\frac{4}{6}=\frac{x}{5-x}\Longrightarrow BD=x=2$$

(4)

$$\frac{9}{6}=\frac{5+x}{5}\Longrightarrow DC=2.5\,,BD=7.5$$



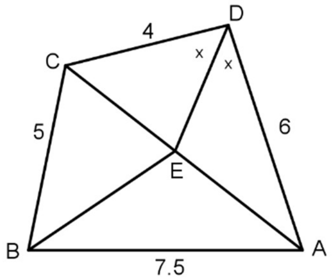
(5)



$$\frac{AX}{XC}=\frac{AE}{EC}\quad(1)\qquad \frac{AX}{XB}=\frac{AD}{DB}\quad(2)$$

$$XB=XC \Longrightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB} \Longrightarrow ED \parallel BC$$

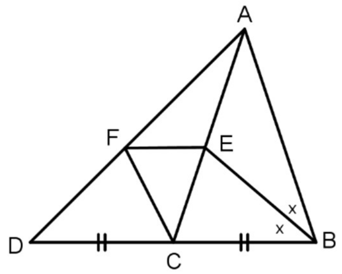
(6)



$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DC}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\quad(1)\qquad \frac{AB}{BC}=\frac{7.5}{5}=\frac{3}{2}\quad(2)\qquad (1),(2)\Longrightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}$$

من عكس نظرية منصف الزاوية يكون BE منصف للزاوية $\angle ABC$

(7)



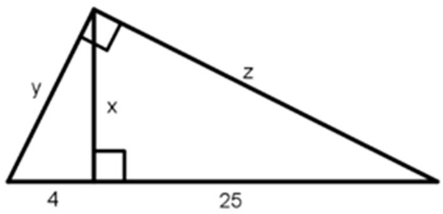
حيث $BC = DC$, $AB = AC$ ، وباستخدام نظرية منصف الزاوية $\angle ABC$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{DC}\quad(1)\qquad \frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FD}\quad(2)\qquad (1),(2)\Longrightarrow \frac{AF}{FD}=\frac{AC}{DC}$$

من عكس نظرية منصف الزاوية يكون CF منصف للزاوية $\angle ACD$

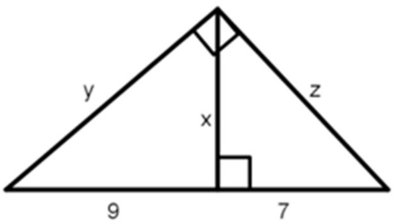
حلول تدريبات فيثاغورس:

(1)



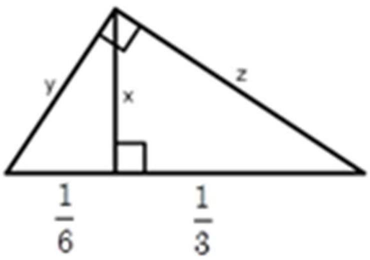
$$x^2 = 4 \times 25 \Longrightarrow x = 10$$
$$y^2 = 4 \times 29 \Longrightarrow y = 2\sqrt{29}$$
$$z^2 = 29 \times 25 \Longrightarrow z = 5\sqrt{29}$$

(2)



$$x^2 = 7 \times 9 \Longrightarrow x = 3\sqrt{7}$$
$$y^2 = 9 \times 16 \Longrightarrow y = 12$$
$$z^2 = 7 \times 16 \Longrightarrow z = 4\sqrt{7}$$

(3)

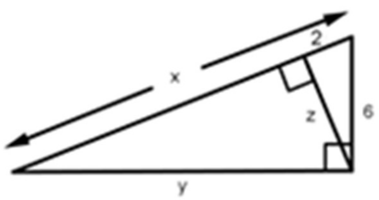


$$x^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$y^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$z^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \Longrightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(4)

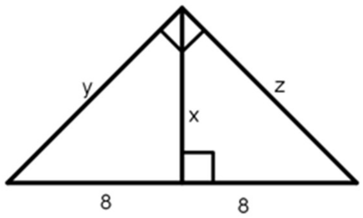


$$6^2 = 2 \times x \Longrightarrow x = 18$$

$$y^2 = 18 \times 16 \Longrightarrow y = 12\sqrt{2}$$

$$z^2 = 2 \times 16 \Longrightarrow z = 4\sqrt{2}$$

(5)

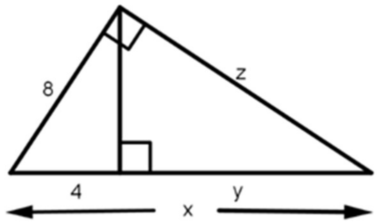


$$x^2 = 8 \times 8 \Longrightarrow x = 8$$

$$y^2 = 8 \times 16 \Longrightarrow y = 8\sqrt{2}$$

$$z = y = 8\sqrt{2}$$

(6)

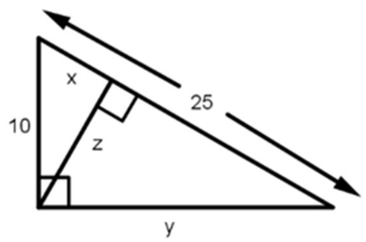


$$8^2 = 4 \times x \Longrightarrow x = 16$$

$$y = 16 - 4 \Longrightarrow y = 12$$

$$z^2 = 12 \times 16 \Longrightarrow z = 8\sqrt{3}$$

(7)



$$10^2 = x \times 25 \Longrightarrow x = 4$$

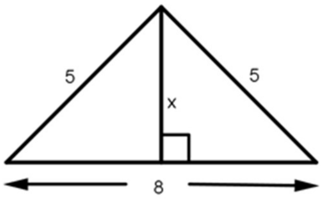
$$y^2 = 21 \times 25 \Longrightarrow y = 5\sqrt{21}$$

$$z^2 = 4 \times 21 \Longrightarrow z = 2\sqrt{21}$$

(8 – 11)

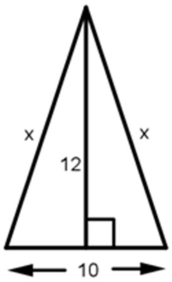
التدريب	ضلع المربع	قطر المربع
(8)	2	$2\sqrt{2}$
(9)	10	$10\sqrt{2}$
(10)	$20k$	$20k\sqrt{2}$
(11)	$7n\sqrt{2}$	$14n$

(12)



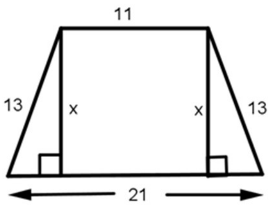
$$x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

(13)



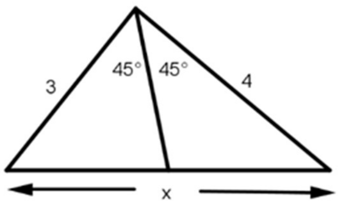
$$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

(14)



$$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

(15)



$$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

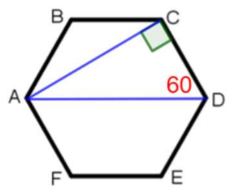
حلول تدريبات المثلثات الخاصة:

$(1-7)$

رقم التدريب	قيمة x
1	$6\sqrt{2}$
2	10
3	$6\sqrt{2}$
4	10
5	6.5
6	$3\sqrt{3}$
7	$10\sqrt{3}$

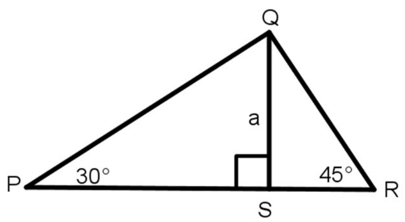
(8)

$$AC = 8\sqrt{3}$$
$$AD = 16$$



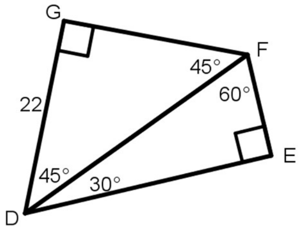
(9)

$$QR = a\sqrt{2}$$
$$PS = a\sqrt{3}$$
$$PQ = 2a$$

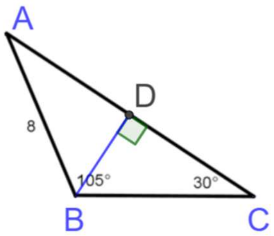


(10)

$GF = 22DF = 22\sqrt{2}FE = 11\sqrt{2}ED = 11\sqrt{6}$



(11)

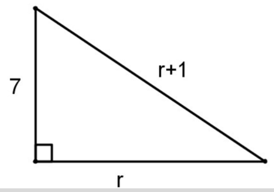


$$AB = 8 \quad , \quad AD = 4\sqrt{2} \quad , \quad BD = 4\sqrt{2}BC$$
$$= 8\sqrt{2} \quad , \quad DC = 4\sqrt{6} \Longrightarrow Perimeter$$
$$= 8 + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$$

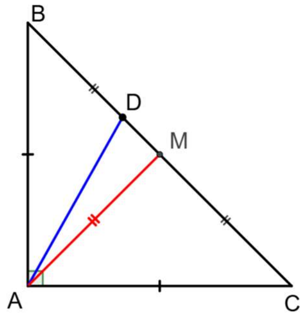
حلول تدريبات التحدي:

(1)

$$(r+1)^2 = r^2 + 7^2 \Longrightarrow r = 24$$



(2)



نرسم عمود من A على الوتر BC ومن خواص المثلث متطابق الضلعين سيقطع BC في منتصفها عند النقطة M

ومن خواص المتوسط على الوتر في المثلث قائم الزاوية سيكون

$$AM = CM = BM$$

$$BD^2 + CD^2 = (BM - MD)^2 + (CM + MD)^2$$
$$= BM^2 + MD^2 - 2BM \cdot MD + CM^2 + MD^2 + 2CM$$
$$\cdot MD = 2(AM^2 + MD^2) = 2AD^2$$

(3)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{1}{2}a \cdot b = 30 \Longrightarrow a \cdot b = 60 a + b + c = 30 \Longrightarrow a + b = 30 - c$$

$$\Longrightarrow (a+b)^2 = (30-c)^2 \Longrightarrow a^2 + b^2 + 2a \cdot b$$

$$= 900 + c^2 - 60c \Longrightarrow c^2 + 2 \cdot 60 = 900 + c^2 - 60c$$

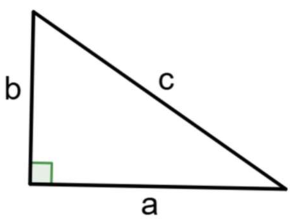
$$\Longrightarrow 120 = 900 - 60c \Longrightarrow c = 13 a \cdot b = 60 \;\Longrightarrow b$$

$$= \frac{60}{a} a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow a^2 + \left(\frac{60}{a}\right)^2 = 13^2$$

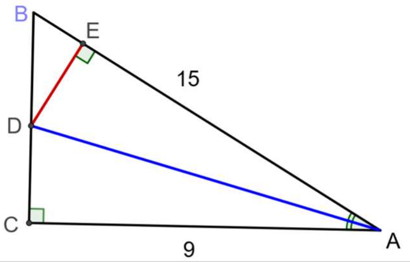
$$\Longrightarrow a^4 - 169a^2 + 3600 = 0 \Longrightarrow (a^2 - 25)(a^2 - 144)$$

$$= 0 \Longrightarrow a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5\,, b = 12 or\; a^2 = 144 \Longrightarrow a$$

$$= 12 \;\;, b = 5$$



(4)



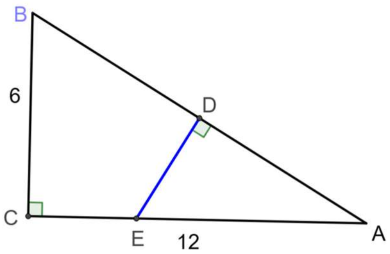
$$BC = \sqrt{225-81} = 12$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} = \frac{BD}{12-BD} \Longrightarrow BD = 4.5 \ , \qquad CD = 7.5$$

$$\Delta ADE \cong \Delta ADC \ (ASA)$$

$$\Longrightarrow DE = DC = 4.5$$

(5)



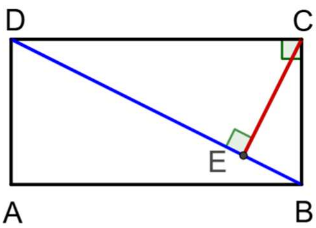
$$AB = \sqrt{144+36} = 6\sqrt{5} \Longrightarrow AD = DB = 3\sqrt{5}$$

$$\Delta ADE \sim \Delta ACB \ (AA)$$

$$\Longrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow \frac{3\sqrt{5}}{12} = \frac{AE}{6\sqrt{5}} \Longrightarrow AE = 7.5$$

$$\Longrightarrow CE = 12 - 7.5 \Longrightarrow CE = 4.5$$

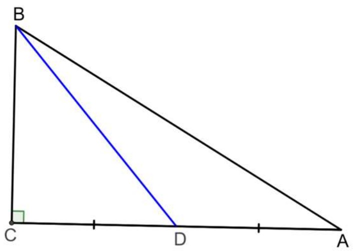
(6)



$$CE^2 = BE \cdot DE \Longrightarrow 25 = \frac{1}{4}BD \cdot \frac{3}{4}BD$$

$$\Longrightarrow BD = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

(7)



$$AB = 2CD$$

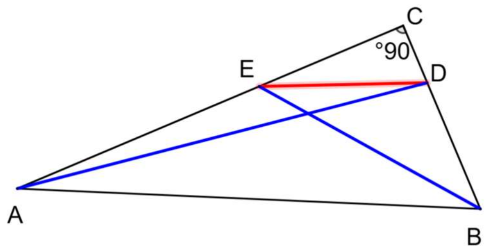
$$AB^2 + 3BC^2 = BC^2 + (2CD)^2 + 3BC^2$$

$$= 4(BC^2 + CD^2) = 4BD^2$$

$$\left. \begin{matrix} BC^2 + CE^2 = BE^2 & AC^2 + CD^2 = AD^2 \end{matrix} \right\} \quad (1)$$
$$\left. \begin{matrix} CD^2 + CE^2 = ED^2 & AC^2 + BC^2 = AB^2 \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

بمقارنة مجموع (1) مع مجموع (2)

نجد أن $AD^2 + BE^2 = AB^2 + DE^2$



حلول (نظرية الاعداد)

تدريبات للمراجعة:

(1)

73 عدد أولي.

91 عدد مؤلف لأنه حاصل ضرب 7×13.

101 عدد أولي.

143 عدد مؤلف لأنه حاصل ضرب 11×13.

199 عدد أولي.

(2)

من قانون عدد القواسم:

$A)\ (1+1)(1+1)=4$ $\quad$ $B)\ (2+1)(1+1)=6$

$C)\ (2+1)(2+1)=9$ $\quad$ $D)\ (m+1)(n+1)$

$= mn+m+n+1$

(3)

لاحظ أنه في أي ثلاثة اعداد طبيعية متتالية، هناك عدد منها زوجي وعدد يقبل القسمة على 3 (من الممكن أنهم نفس العدد). إذاً حاصل الضرب يجب أن يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل على 2,3 معًا.

(4)

a) نحلل $30 \ = \ 2\times\ 3\times\ 5$

يجب أن نثبت أن حاصل الضرب يقبل القسمة على $5\ ,3\ ,2$ معاً.

- **القسمة على 5:** في أي سلسلة من خمسة أعداد طبيعية متتالية، يجب أن يظهر عدد واحد بالضبط يقبل القسمة على 5.

- **القسمة على 3:** في أي سلسلة من ثلاثة أعداد طبيعية متتالية، يجب أن يظهر عدد واحد بالضبط يقبل القسمة على 3. بما أن لدينا خمسة أعداد، فالشرط محقق.

- **القسمة على 2:** في أي سلسلة من عددين طبيعيين متتاليين، يجب أن يظهر عدد واحد بالضبط يقبل القسمة على 2. بما أن لدينا خمسة أعداد، فالشرط محقق.

وبما أن حاصل الضرب يقبل القسمة على 2 و 3 و 5، فإنه يقبل القسمة على $2\times\ 3\times\ 5\ \ =\ \ 30$

b) نحلل $120\ \ =\ \ 2^3\times\ 3\times\ 5 = 8\times 3\times 5$

نحن نعلم مسبقاً أنه يقبل القسمة على 3 و 5 (كما في المطلوب في الفقرة السابقة). علينا إثبات أنه يقبل القسمة على 8.

في أي سلسلة من أربعة أعداد متتالية، يوجد على الأقل مضاعف للعدد 4 ومضاعف للعدد 2 (فردي، زوجي، فردي، زوجي) أو مضاعف للعدد 8.

وبالتالي، فإن حاصل الضرب يقبل القسمة على $8\times\ 3\times\ 5\ \ =\ \ 120$

(5)

نحلل العدد 660 إلى عوامله الأولية: $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$

لكي يقبل $n!$ القسمة على 660 ، يجب أن يظهر كل عامل أولي في تحلل 660 كعامل في $n!$

- **لضمان العامل** 11: يجب أن يكون $n \geq 11$
- **لضمان العامل** 5: يجب أن يكون $n \geq 5$
- **لضمان العامل** 3: يجب أن يكون $n \geq 3$
- **لضمان العامل** $4 = 2^2$ **:** يجب أن يكون $n \geq 4$

لكي تتحقق جميع الشروط، يجب أن يكون n أكبر من أو يساوي أكبر عامل أولي ، إذا الناتج هو 11

(6)

عدد الأصفار المتجاورة في نهاية أي عدد يعتمد على عدد مرات تكرار العامل 10 في تحليله، أي عدد مرات تكرار العاملين 2 و 5. بما أن العامل 2 يتوفر دائماً بكثرة أكثر من العامل 5 في $n!$، فإن عدد الأصفار يساوي عدد مرات تكرار العامل 5.

عدد مرات ظهور العامل 5 في $10!$ هي في الـ 5 والـ 10، إذاً العدد يحتوي على صفرين فقط.

(7)

لا يمكن، لأن $24!$ ينتهي بـ 4 أصفار و $25!$ ينتهي بـ 6 أصفار. وأي عدد أكبر من الـ$25!$ يحتوي على عدد أكبر من الأصفار.

(8)

نحلل:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 33$$

نفرض $A = x - y \,, B = x + y$

عوامل 33 هي: $(1,33), (3,11)$

- الحالة الأولى $x - y = 1$ **:** و $x + y = 33$

$$2x = 34 \Rightarrow x = 17$$

$$\Rightarrow y = 33 - 17 = 16$$

$$\Rightarrow x, y = (17,16)$$

- الحالة الثانية $x - y = 3$ **:** و $x + y = 11$

$$2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow y = 11 - 7 = 4$$

$$\Rightarrow x, y = (7,4)$$

تدريبات (1) gcd :

(1)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$8 = 2^3, 9 = 3^2$$

وهما لا يحتويان على أي قواسم مشتركة. إذًا:

$$gcd\ (8,9)\ = 1$$

(2)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 96 = 2^5 \times 3$$

القواسم المشتركة هي $2^1 \times 3^1$. إذًا:

$$gcd\ (54,96)\ = 6$$

(3)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$35 = 5 \times 7, 96 = 7 \times 13$$

القواسم المشتركة هي 7. إذًا:

$$gcd\ (35,91)\ = 7$$

(4)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 6 = 2 \times 3$$

القواسم المشتركة هي $2^1 \times 3^1$. إذًا:

$$gcd\ (54,6)\ = 6$$

(5)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$199 = 199, 256 = 2^8$$

وهما لا يحتويان على أي قواسم مشتركة. إذًا:

$$gcd\ (199,256)\ = 1$$

(6)

عند تحليل العدد 120 نحصل على

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

سنتأكد أي من الخيارات يحقق أن $gcd\,(120, n) = 24$

$gcd(120, 2 \times 3^3) = 6$

$gcd(120, 2^2 \times 3^3) = 12$

$gcd(120, 2^3 \times 3^2 \times 11) = 24$

$gcd(120, 2^4 \times 3^3 \times 5) = 120$

إذًا، الجواب الصحيح هو (C).

تدريبات lcm (2) :

(1)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$8 = 2^3, 9 = 3^2$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر. إذًا:

$$lcm\ (8,9)\ = 2^3 \times 3^2 = 72$$

(2)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 96 = 2^5 \times 3$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر. إذًا:

$$lcm\ (54,96)\ = 2^5 \times 3^3$$

(3)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$35 = 5 \times 7, 91 = 7 \times 13$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر. إذًا:

$$lcm\ (35,91)\ = 5 \times 7 \times 13$$

(4)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 6 = 2 \times 3$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر. إذًا:

$$lcm\ (54,6)\ = 2 \times 3^3$$

(5)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$199 = 199, 256 = 2^8$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر. إذًا:

$$lcm\ (199,256)\ = 2^8 \times 199$$

(6)

عند تحليل العدد 20 نحصل على :

$$20 = 2^2 \times 5$$

سنتأكد أي من الخيارات يحقق أن $lcm\ (20, n)\ = 180$

$lcm\ (20{,}2 \times 3^3)\ = 2^2 \times 3^3 \times 5^1 = 540$

$lcm\ (20, 2^2 \times 3^2)\ = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$

$lcm\ (20, 2^3 \times 3^2)\ = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

$lcm\ (20, 2^4 \times 3^3 \times 5)\ = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 = 2160$

إذًا، الجواب الصحيح هو (b).

تدريبات (3):

(1)

$$18n = 6 \times 36$$

$$\Rightarrow n = \frac{6 \times 36}{18} = 12$$

(2)

عند تحليل الأعداد نحصل على:

$$196 = 2^2 \times 7^2, \qquad 192 = 2^6 \times 3, \qquad 169 = 13^2, \qquad 240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

إذًا، المربعات الكاملة هي 196 و 169.

(3)

لا، لاحظ ان مجموع خانات العدد ستكون:

$$0 \times 100 + 1 \times 100 + 2 \times 100 = 300$$

من قابلية القسمة على 3,9 نلاحظ أن العدد يقبل القسمة على 3 ولكن لايقبل القسمة على 9. إذًا، لا يمكن أن يكون مربعا لأن قوة الـ 3 في تحليل العدد ستكون 1 وهذا عدد فردي.

(4)

قانون عدد القواسم لعدد

$$N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{\alpha_k}$$

هو:

$$.(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)....(\alpha_k + 1)$$

فإذا كان هذا العدد فرديا إذًا كل من الأقواس يجب ان يكون عدد فردي وهذا يعني أن كل من القوى يجب أن تكون عدد زوجي. وهذا يعني ان العدد يجب أن يكون مربعا.

(5)

لنكتب تحليل كل من a, b بالصورة التالية:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

بحيث $\alpha_k, \beta_k \geq 0$

فيكون القاسم المشترك الأكبر:

$$gcd(a, b) = p_1^{min\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{min\,(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{min\,(\alpha_n,\beta_n)}$$

والمضاعف المشترك الأصغر:

$$lcm(a, b) = p_1^{max\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{max\,(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{max\,(\alpha_n,\beta_n)}$$

ومن الواضح أن:

$$(\alpha_k, \beta_k) + (\alpha_k, \beta_k) = \alpha_k + \beta_k$$

(بما أن أحدهما هو الأكبر والآخر هو الأصغر)

الآن لدينا:

$$d \times m = p_1^{min\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{(\alpha_n,\beta_n)} \times p_1^{max\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$$

$$= p_1^{min\,(\alpha_1,\beta_1)+max\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{(\alpha_2,\beta_2)\,+max\,(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{(\alpha_n,\beta_n)\,+max\,(\alpha_n,\beta_n)} = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_n^{\alpha_n+\beta_n}$$

ومن جهة أخرى:

$$a \times b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \times p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_n^{\alpha_n+\beta_n} = d \times m$$

وهو المطلوب إثباته.

حلول (التركيبات)

(1)

$$\frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$$

(2)

$$\frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = 12600$$

(3)

$$\frac{9!}{3! \times 2!} = 30240$$

(4)

(a) $\frac{7!}{2!\times 2!} = 1260$

(b) $\frac{5!}{2!} = 60$

(5)

$$4! = 24$$

(6)

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

(7)

الإجمالي بدون قيد: $\frac{6!}{3!} = 120$

في كل الكلمات يكون ترتيب حروف A و B هو احد:

AAAB, AABA, ABAA, BAAA

من دون اعتبارا R, مؤقتا

اذن في نصف الحالات فقط يكون الB في المنتصف

$$\frac{120}{2} = 60$$

(8)

كلمة ELEMENTARY فيها 10 حروف، وتكراراتها:

E ×1 E×3، T ×1، L ×1، M ×1، N ×1، A ×1، R ×1، Y.

إذا اشترطنا أن تكون الحروف E الثلاثة متجاورة،

نعدها ككتلة واحدة (EEE). تصبح الكلمة فعليًا

مكوّنة من 8 عناصر مختلفة: $8! = 40320$

(9)

نفكّك العدد 231 إلى عوامله الأولية: 231 = 3 × 7 × 11 كل عامل أولي يمكن توزيعه بين a وb وc بطرق مستقلة. لكل عامل أولي لدينا 3 خيارات: أن يذهب إلى a أو b أو c. عدد الطرق = 3^3 = 27 ثلاثية مرتبة.

التباديل الدائري

(10)

$$(5-1)! = 24$$

(11)

5 أشياء: $(5 - 1)! = 24$ طريقة.

7 أشياء: $(7 - 1)! = 720$. لـ n أشياء: $(n - 1)!$

(12)

$$8! = 40{,}320$$

(13)

(a) $(36 - 1)! = 35!$

(b) $7! = 5040$

(14)

$$(5 - 1)! = 24$$

$$5! = 120$$

(15)

إذا لم يُسمح بقلب السلسلة (أي نعتبر الاتجاهين مختلفين):

$$(13 - 1)! = 12!$$

إذا كان قلب السلسلة مسموحًا (أي نعتبر السلسلتين المقلوبتين متماثلتين): نقسم الناتج على 2 عدد السلاسل $\frac{12!}{2}$

(17)

a) نرتّب أولًا المهندسين حول المائدة، ولأن الجلوس دائري:

عدد طرق ترتيبهم = $(7-1)! = 720$

يوجد بين كل مهندسين مقعد شاغر (7 أماكن) نرتب الأطباء في 5 أماكن منها بطرق عددها= ${}^{7}P_5$.

إذاً عدد الطرق= ${}^{7}P_5 \times 720$

b) لا يمكن لأن عدد المقاعد الشاغرة بين كل طبيبين أقل من عدد المهندسين

(16)

نرتّب أولًا الأطباء حول المائدة، ولأن الجلوس دائري:

عدد طرق ترتيبهم = $(5-1)! = \mathbf{24}$ طريقة.

الآن يوجد بين كل طبيبين مقعد شاغر (5 أماكن) يجلس فيها المهندسون، نرتّب المهندسين في هذه المقاعد: $5! = \mathbf{120}$ طريقة. إذن المجموع

$120 \times \mathbf{24} = 2880$ طريقة.

التوافيق

(19)

عدد الحروف غير E سبعة، نرتبها بـ 7! طريقة.

يوجد 8 فراغات بينها لوضع حرف E ثلاث مرات ولا يمكن استخدام نفس الموضع مرتين بحيث لا تتجاور نختار 3 من 8. لاحظ ان الترتيب لا يهم

$$7!.{}^{8}C_3 = 282240$$

(18)

$${}^{5}C_2 = 10$$

(21)

بين الحروف الاربعة: ${}^{4}C_2 = 6$

بين الأعداد الفردية الستة: ${}^{6}C_2 = 15$

بين الأعداد الزوجية الثلاثة: ${}^{3}C_2 = 3$

المجموع = 6+15+3 = 24 وتراً

(20)

الحالة التي يكون فيها عدد E أكبر من عدد F تعني أن عدد E > 5.

أي عدد حرف E هو 6 أو 7 أو 8 أو 9 أو 10.

عدد الطرق = ${}^{10}C_6 + {}^{10}C_7 + {}^{10}C_8 + {}^{10}C_9 + {}^{10}C_{10}$

210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386 كلمة.

(23)

عدد الأشخاص الكلي مع أسامة = 11 شخصًا.

سيجلس أسامة في مكان محدد، وعلى يمينه ويساره شخصان من أصدقائه. عدد أزواج الأصدقاء الذين يمكن أن يجاوروه = عدد طرق اختيار شخصين من 10 أصدقاء:

${}^{10}C_2 = 45$ زوجًا مختلفًا

(22)

$$a)\ {}^{8}C_3 . {}^{5}C_3 = 560$$

$$b)\ \frac{{}^{8}C_4 . {}^{4}C_4}{2} = 35$$

$$c)\ \frac{{}^{8}C_2 . {}^{6}C_2 . {}^{4}C_2 . {}^{2}C_2}{4!} = 105$$

$$d)\ \frac{{}^{8}C_4 . {}^{4}C_2 . {}^{2}C_2}{2!} = 210$$

$$e)\ {}^{8}C_4 . {}^{4}C_3 . {}^{1}C_1 = 280$$

نسمو

NSMO

أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني

موهبة
Mawhiba

وزارة التعليم
Ministry of Education