أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني
نسمو

حقيبة رياضيات 2
مسابقة الإدارات العامة
2026م

إعداد

الفريق العلمي للرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهرس

مقدمة

أبناؤنا وبناتنا المتميزين،

يسرّنا أن نهنئكم على اجتياز مرحلة المدن والمحافظات وتأهلكم إلى **مرحلة الإدارات العامة**، وهي خطوة متقدمة في طريق التحدي والابتكار الرياضي.

تُعنى هذه الحقيبة بتوسيع مداركم في الفروع الأربعة الرئيسة: **التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد**، مع التركيز على المفاهيم المتقدمة في العدّ، والمراجعة الهندسية، والمعادلات الخطية، والتوزيع والضرب في نظرية الأعداد.

تهدف هذه المرحلة إلى صقل مهاراتكم في التفكير التحليلي وربط المفاهيم الرياضية ببعضها، مع تطبيقها في مواقف متنوعة.

وتُعد هذه الحقيبة فرصة لتعميق فهمكم للأنماط الرياضية واستخدام المنطق في التبرير وحل المسائل بأساليب منظمة.

نثق بقدراتكم ونتطلع لرؤيتكم تتألقون في هذه المرحلة المهمة من رحلتكم نحو التميز.

الفريق العلمي للأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات (نسمو) – مسار الرياضيات

الوحدة الأولى : الجبـــــــــر

النسبة المئوية

هي ببساطة نسبة الجزء إلى الكل حيث إن الكل يساوي 100.

وتكتب 100 من أصل 54 تعني 54% مثلاً

$$\frac{54}{100}$$

وتعطى بالعلاقة:

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{100}$$

حيث a تمثل $x\%$ من b.

فمثلاً لتحويل 3 من أصل 16 إلى نسبة مئوية نستخدم:

$$\frac{3}{16}=\frac{x}{100}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين، وبالتبسيط نحصل على:

$$x=18\frac{3}{4}$$

ونقول أن 3 تمثل 18,75% من 16

- إذا زاد العدد x بمقدار $k\%$ بالتالي **مقدار العدد بعد الزيادة** يعطى بالعلاقة:

$$x\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)$$

- إذا نقص العدد x بمقدار $k\%$ بالتالي **مقدار العدد بعد النقصان** يعطى بالعلاقة:

$$x\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right)$$

مثال:

عندما ينقص عدد بنسبة 40%، يكون الناتج 36. ما هو العدد الأصلي؟

الحل:

لنفرض أن العدد هو x. لدينا:

$$x\left(1-\frac{40}{100}\right)=36$$

$$\Rightarrow\frac{6}{10}x=36$$

$$\Rightarrow x=60$$

إذن، العدد الأصلي هو 60.

تدريبات:

(1) لكل $x, y, z \neq 0$ أوجد قيمة k بحيث:

$$\frac{7}{x+y} = \frac{k}{x+z} = \frac{11}{z-y}$$

(2) أوجد قيمة $a, b, c \in N$ والتي تحقق:

$$\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{2} = \frac{8}{c+3}$$

(3) إذا كانت 120% من عدد ما هي 36. فما هو هذا العدد؟

(4) ما هي نسبة التخفيض لسلعة إذا تحول سعرها من 2890 ريالاً إلى 2023 ريالاً؟

(5) إذا أحضرت نورا 60 قطعة من البسكويت إلى المدرسة. فأعطت معلماتها 40% من البسكويت وَ 25%من المتبقي لصديقاتها، وأكلت ثلث ما تبقى. فكم قطعة بسكويت متبقية؟

(6) إذا كانت النسبة بين قياس زوايا الخماسي الداخلية هي: $2:3:4:5:6$ فما قياس الزاوية الكبرى؟

(7) إذا كان b أكبر من a بمقدار 5% وَ b أقل من c بمقدار 15%. ما هي النسبة بين a إلى c؟

(8) مستطيل تم زيادة طوله بمقدار 50% وفي عرضه 20%. ما هي نسبة الزيادة في مساحته؟

(9) في كل يوم 20% من السمك يباع في سوق السمك، إذا بقي 2000 سمكة في السوق عند نهاية يوم الثلاثاء، كم كان عدد السمك عند بداية يوم الاثنين؟

(10) إذا كان t يساوي 25% من u ما هي نسبة $4t$ إلى $2u$ ؟

(11) إذا كان

$$yz : zx : xy = 1 : 2 : 3 \qquad \text{and} \qquad \frac{x}{yz} : \frac{y}{zx} = 1 : k$$

فأوجد قيمة k.

معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد

لحل معادلة خطية في متغير واحد، نتبع الخطوات التالية بشكل مرتب:

- **التخلص من المقامات (إن وجدت)**

إذا كانت هناك كسور في المعادلة، نضرب كل حد في **المضاعف المشترك الأصغر (L.C.M)** للمقامات للتخلص منها.

- **فك الأقواس**

نستخدم قانون التوزيع لتبسيط الأقواس، مثل:

$$2(x+3) = 2x + 6$$

- **نقل الحدود**

ننقل جميع الحدود التي تشمل المجهول في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر تبعاً للقاعدة:

لنقل حدود في معادلة من طرف لطرف آخر نعكس إشارتها والحدود غير المنقولة تظل إشارتها كما هي.

- **تجميع الحدود المتشابهة**

بعد النقل، نبسط الحدود حتى تصبح المعادلة على الشكل:

$ax = b$ حيث a وb ثوابت.

- **القسمة على معامل المتغير**

نقسم الطرفين على a (معامل المتغير) للحصول على الحل:

$$ax = b \Longrightarrow x = \frac{b}{a}$$

مع ملاحظة أن:

- عندما $a \neq 0$ يكون لدينا حل وحيد:

$$x = \frac{b}{a}$$

- عندما $a = 0 \,, b \neq 0$ فلا يوجد حل.
- عندما $a = 0 \,, b = 0$ فإن أي عدد حقيقي هو حل للمعادلة.

- **للتحقق من الحل**

نعوض قيمة المتغير الناتجة في المعادلة الأصلية: إذا تحققت المساواة فالحل صحيح، وإذا لم تتحقق فهناك خطأ في خطواتنا.

- **ملاحظة:** أحياناً لا نلتزم حرفياً بالترتيب السابق عندما نجد حل أقرب.

مثال:

حل المعادلة:

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1$$

الحل:

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1$$

بضرب الطرفين في 10

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8=10$$

بطرح 8 من الطرفين

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]=2$$

بضرب الطرفين في 9

$$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16=18$$

بطرح 16 من الطرفين

$$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)=2$$

بضرب الطرفين في 5

$$\frac{x+2}{3}+8=10$$

بطرح 8 من الطرفين

$$\frac{x+2}{3}=2$$

بضرب الطرفين في 3

$$x+2=6$$

بطرح 2 من الطرفين

$$x=4$$

تدريبات:

(1) حل المعادلة:

$$1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}$$

(2) إذا كان a,b,c أعداداً ثابتة موجبة، حل المعادلة:

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$$

(3) حل المعادلة:

$$(x-3)^2+(x+1)^2+(4x-5)^2=0$$

(4) حل المعادلة:

$$ax+b-\frac{5x+2ab}{5}=\frac{1}{4}$$

(5) إذا كانت المعادلة:

$$a(2x+3)+3bx=12x+5$$

لها عدد لا نهائي من الحلول للمتغير x. أوجد قيمة كل من a,b.

(6) إذا كانت المعادلة:

$$2a(x+6)=4x+1$$

ليس لها حلول، أوجد قيمة a.

(7) إذا كانت المعادلة: $kx=12$ لها حلول صحيحة موجبة، بحيث k عدد صحيح. أوجد عدد قيم k الممكنة.

(8) كم عدد قيم x الصحيحة الموجبة الممكنة التي تحقق المعادلة:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$$

(9) إذا كان حل المعادلة:

$$3a - x = \frac{x}{2} + 3$$

هو 4. أوجد قيمة: $(-a)^2 - 2a$.

(10) حل المعادلة:

$$\frac{x-n}{m} - \frac{x-m}{n} = \frac{m}{n}$$

بحيث: $mn \neq 0$.

نظام المعادلات الخطية الآنية

الصورة العامة لمعادلتين خطيتين في مجهولين هي:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

حيث إنّ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ أعداد حقيقة.

وهما معادلتان من الدرجة الأولى في متغيرين. وتمثل في المستوى الإحداثي خطين مستقيمين ويكون حل النظام هو إيجاد نقاط التقاطع المشتركة بين المستقيمين (لأنها تمثل حل لكلتي المعادلتين).

ولحذف أحد المتغيرات لحل النظام نستخدم:

(i) العمليات على المعادلات المعتادة.

(ii) طريقة التعويض.

وفي كثير من الأحيان تكون الطريقة (i) أكثر فاعلية.

- عندما

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

إذن المستقيمان متقاطعان في نقطة واحدة بالتالي النظام له حل وحيد وهو:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

- عندما

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

فإن المستقيمين منطبقان وبالتالي جميع نقاطهما مشتركة، ولذلك النظام له عدد لانهائي من الحلول.

- عندما

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

فإن المستقيمين متوازيان ولا يوجد بينهما نقاط تقاطع بالتالي النظام غير متناسق، أي ليس له حل.

مثال:

أوجد عدد الحلول لكل نظام مما يأتي:

$$(a)\begin{cases}5x+2y=4\\7x+5y=1\end{cases} \qquad (b)\begin{cases}4x+3y=3\\8x+6y=7\end{cases}$$

الحل:

(a)حل وحيد لأن:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{5}{7}\neq\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{5}$$

(b)لا يوجد حل لأن:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{8}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{3}{6}\neq\frac{c_1}{c_2}=\frac{3}{7}$$

تدريبات:

(1) أوجد عدد حلول النظام التالي:

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x + 10y = 6 \end{cases}$$

(2) حل كل من أنظمة المعادلتين:

$$(a)\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 7 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + 4y = 21 \end{cases}$$

(3) عددان مجموعهما 42 والفرق بينهما 8 فما هما العددان؟

(4) في وقتٍ ما لاحظت ريما أن ساعتَها الرقمية تُظهر أن الوقت هو $\boldsymbol{a}$ دقيقة بعد الثانية تمامًا.

وبعد 15 دقيقة، أظهرت الساعة أنها $\boldsymbol{b}$ دقيقة بعد الثالثة تمامًا.

أدهشها أن قيمة $\boldsymbol{a}$ تساوي ستة أضعاف $\boldsymbol{b}$.

فما الوقت الذي كانت تنظر فيه إلى ساعتِها في المرة الثانية؟

(5) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{5} - \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{1}{2}, \\ 2(x-y) - 3(x+y) + 1 = 0 \end{cases}$$

(6) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} 5.4x + 4.6y = 104 \\ 4.6x + 5.4y = 96 \end{cases}$$

(7) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} x + 2(5x + y) = 16 \\ \quad 5x + y = 7 \end{cases}$$

(8) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

(9) حل نظام المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ y+2z=8 \\ z+2u=11 \\ u+2x=6 \end{cases}$$

(10) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} 5x-y+3z=a \\ 5y-z+3x=b \\ 5z-x+3y=c \end{cases}$$

(11) إذا كان $x=2,\quad y=1$ حلول النظام:

$$\begin{cases} ax+by=7 \\ bx+cy=5 \end{cases}$$

فأوجد معادلة توضح العلاقة بين a,c.

(12) أوجد قيمة (a,b,c) إذا كان النظامان:

$$\begin{cases} ax-by+z=8 \\ x+y+5=c \\ 2x+3y=-4 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+y-z=0 \\ 4ax+5by-z=-22 \end{cases}$$

لهما نفس الحل.

(13) أوجد قيمة k التي تجعل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} kx-y=-\dfrac{1}{3} \\ 3y=1-6x \end{cases}$$

(a) له حل وحيد. (b) ليس له حل. (c) له عدد لا نهائي من الحلول.

(14) إذا كانت x,y,z تحقق نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} 2020(x-y)+2021(y-z)+2022(z-x)=0 \\ \\ 2020^2(x-y)+2021^2(y-z)+2022^2(z-x)=2021 \end{cases}$$

أوجد قيمة $z-y$.

(15) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ y - z - x = 1 \\ z - x - y = -15 \end{cases}$$

(16) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z + u = 2 \\ z - u + v = 3 \\ u - v + x = 4 \\ v - x + y = 5 \end{cases}$$

أسئلة للتحدي:

(1) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = 6 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 14 \end{cases}$$

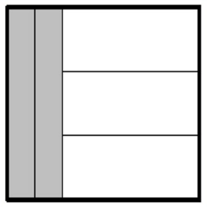
(2) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 4 \\ z + x = 6 \end{cases}$$

(3) اعط مثالاً لكسرين الفرق بينهما يساوي حاصل ضربهما.

(4) الشكل المقابل عبارة عن مربع مكون من خمس مستطيلات لها نفس المحيط.

ما النسبة بين مساحة أحد المستطيلات المظللة إلى مساحة أحد المستطيلات غير المظللة؟



(5) نريد تقسيم مبلغ من المال بالتساوي بين مجموعة من الأطفال. إذا حصل كل طفل على 60 هللة فسيتبقى 2.10 ريال، بينما إذا كان هناك 20 هللة أكثر من هذا المبلغ فسيكون هناك ما يكفي لكي يحصل كل طفل على 70 هللة. كم عدد الأطفال في المجموعة؟

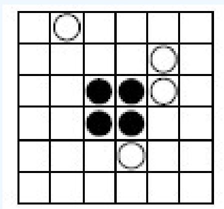
(6) العدد 3600 يمكن كتابته على الصورة $2^a \times 3^b \times 4^c \times 5^d$. حيث a, b, c, d أعداد صحيحة موجبة.

إذا علمت أن $a + b + c + d = 7$. فما قيمة c ؟

(7) لدينا العدد 12345123451234512345. إذا كان بإمكانك إزالة عشر خانات، ما أكبر عدد يمكنك الحصول عليه؟

(8) قم بقطع الشكل المرفق إلى أربعة أجزاء متطابقة (سواء في الشكل أو المساحة)

بحيث يحتوي كل جزء على دائرة سوداء واحدة وكذلك دائرة بيضاء واحدة.



(9) لدى أخي أربعة أطفال. تبلغ أعمارهم 5 و8 و 13 و 15 سنة. أسماؤهم (بدون ترتيب) هي محمد ورجاء ونجاح ونور. إحدى البنات في رياض الأطفال، ورجاء أكبر من محمد، ومجموع عمري رجاء ونور يقبل القسمة على ثلاثة.

هل نور ولد أم بنت؟

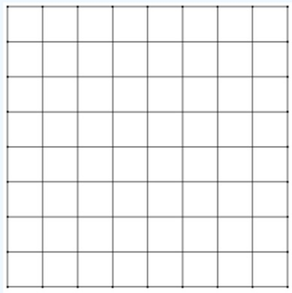
(10) هناك مئة شخص يعيشون على جزيرة. إذا علمت أن بعضهم كاذبون والباقون يقولون الصدق دائمًا، وأن كل ساكن للجزيرة لديه فصل مفضل من السنة. سئل كل ساكن أربعة أسئلة:

- هل تحب الشتاء؟
- هل تحب الربيع؟
- هل تحب الصيف؟
- هل تحب الخريف؟

كانت هناك 25 إجابة إيجابية (أي بنعم) على السؤال الأول، وكذلك 25 إجابة على السؤال الثاني، و 45 إجابة على السؤال الثالث، و 55 إجابة على السؤال الرابع.

كم عدد الكذابين في الجزيرة؟

(11) لدينا الجدول التالي من النوع 8×8 مقسم ل 64 مربع صغير.

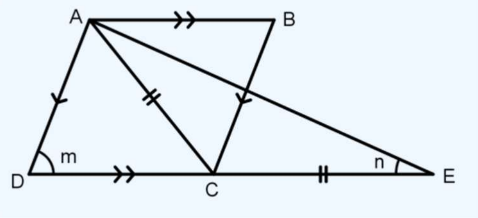


هل يمكنك تلوين 17 مربع صغير باللون الأسود بحيث لا يشترك أي مربعين منها في ضلع أو حتى رأس؟

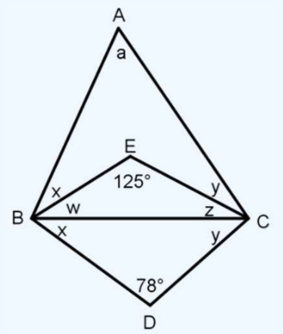
الوحدة الثانية: الهندســـة

تدريبات مراجعة

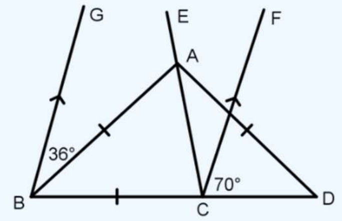
(1) على الشكل المجاور $ABCD$ معين، ACE مثلث متطابق الضلعين فيه $AC = CE$ و D, E, C تقع على استقامة واحدة. إذا كانت $\angle AEC = n$ ، $\angle ADC = m$. كوّن معادلة تحوي m, n



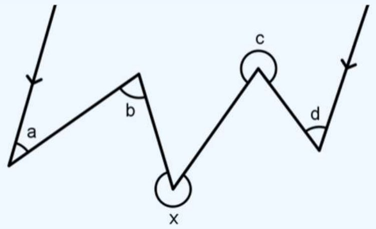
(2) على الشكل المجاور: $ABCD$ شكل رباعي. النقطة E تقع داخله بحيث $\angle ABE = \angle DBC = x$ ، $\angle ACE = \angle DCB = y$. إذا كانت $\angle BEC = 125°, \angle BDC = 78°$ أوجد $\angle A$



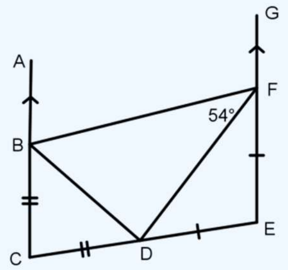
(3) على الشكل المجاور: إذا كان $\underline{AB} = \underline{BC} = \underline{AD}$ باستخدام المعطيات الموضحة أوجد قياس $\angle EAD$.



(4) على الشكل المجاور: عبر عن قيمة x بدلالة a, b, c, d



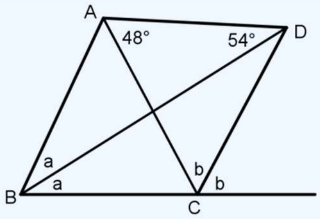
(5) على الشكل المجاور $AC \parallel GE$ ، $\underline{BC} = \underline{CD}, \underline{DE} = \underline{EF}$. إذا كانت $\angle BFD = 54°$. فأوجد قياس $\angle DBF$.



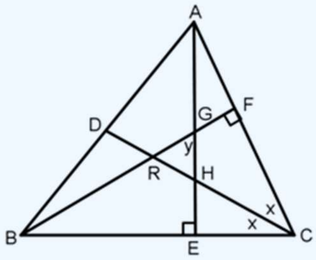
(6) على الشكل المجاور: مستخدما المعطيات الموضحة

(a) عبر عن الزاويتين $\angle BAC, \angle BDC$ بدلالة a, b.

(b) إذا كانت $a = \frac{2}{3} b$ فأوجد a, b.



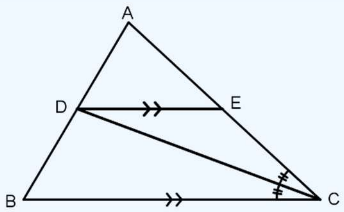
(7) على الشكل المجاور وباستخدام المعطيات الموضحة كون معادلة تحوي x, y



(8) على الشكل المجاور: CD ينصف $\angle ACB$ ،

$DE \parallel BC$ ، $\angle B = 70°$ ، $\angle ACB = 40°$ ،

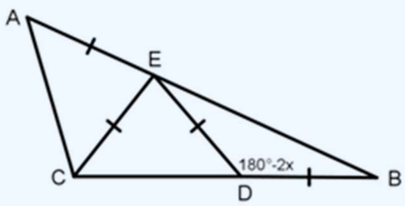
أوجد قياس كل من $\angle EDC, \angle BDC$.



(9) على الشكل ΔABC فيه E, D تقعان على $\underline{AB}, \underline{BC}$ بحيث

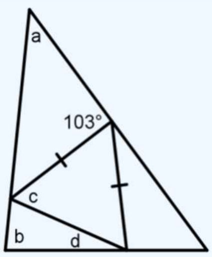
إذا كانت $\underline{AE} = \underline{EC} = \underline{DE} = \underline{DB}$ $\angle EDB = 180° - 2x$

فأوجد قياس $\angle ACE$ بدلالة x



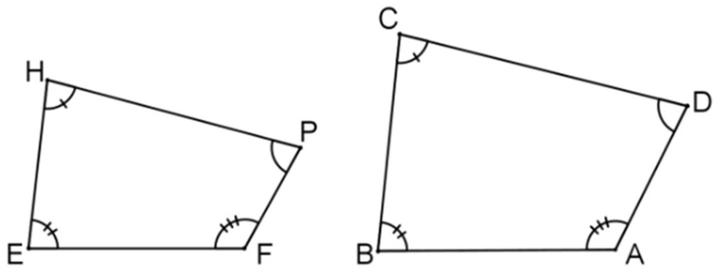
(10) على الشكل المجاور:

إذا كان $a = \frac{2}{3} c = \frac{1}{2} b = 3d$ فأوجد a, b, c, d .



التشابه

تعريف1 :



يتشابه أي مضلعين المضلعين إذا تحقق الشرطان الآتيان:

(1) تساوي قياسات الزوايا المتناظرة. (2) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

ففي المضلعين الموضحين بالشكل إذا كان:

$$\left\{\begin{array}{c} \angle A = \angle F \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle H \\ \angle D = \angle P \\ \dfrac{AB}{FE} = \dfrac{BC}{EH} = \dfrac{CD}{HP} = \dfrac{DA}{PF} \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \sim FEHP$$

نظرية 1 :

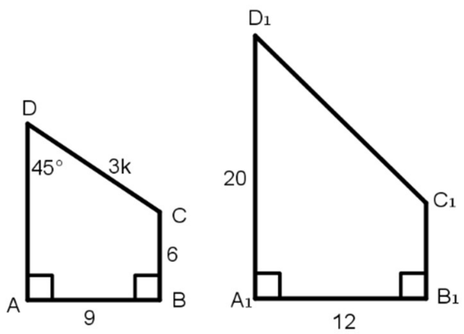
النسبة بين طول محيطي مضلعين متشابهين تساوي نفس نسبة التشابه بين أي ضلعين متناظرين فيهما

تدريبات:

في التدريبات $(8-1)$ اختر الكلمة المناسبة من بين (دائما متشابهان – أحيانا متشابهان –التشابه مستحيل):

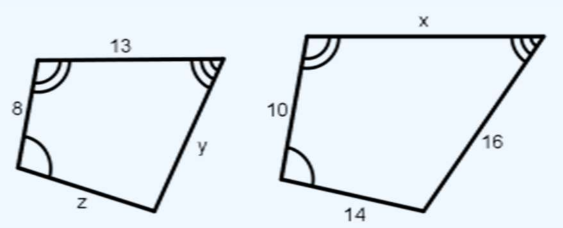
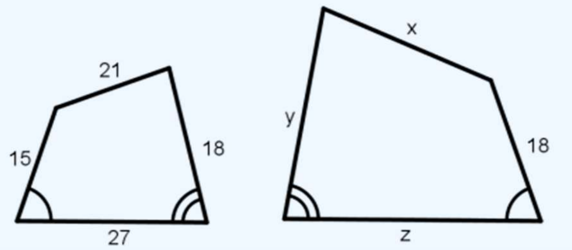
	المضلعان	دائما متشابهان	أحيانا متشابهان	التشابه مستحيل
(1)	مثلثان متطابقا الأضلاع			
(2)	مثلثان متطابقا الضلعين.			
(3)	مربعان.			
(4)	معينان.			
(5)	مثلثان قائما الزاوية.			
(6)	مثلثان مختلفا الأضلاع.			
(7)	مستطيلان.			
(8)	مثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا.			

التدريبات $16-9$ على الشكل التالي: حيث الرباعي $ABCD \sim$ الرباعي $A_1B_1C_1D_1$.



(9)	نسبة التشابه بين $\boldsymbol{ABCD}$ ، $\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}$.	
(10)	ما هو نوع الرباعي A_1, B_1, C_1, D_1؟ وضح اجابتك.	
(11)	$m\angle D_1$ يساوي	
(12)	$m\angle C_1$ يساوي.	
(13)	C_1B_1 يساوي.	
(14)	أوجد AD يساوي.	
(15)	C_1D_1 يساوي.	
(16)	النسبة بين محيطي المضلعين يساوي.	

في التدريبين (18 – 17) أوجد قيمة x, y, z. حيث إن كل زوجين من المضلعات في الشكل متشابهان.

(17)		(18)	

تشابه المثلثات

نظرية 2 :
لكل مثلثين متشابهين:

(1)الأضلاع المتناظرة متناسبة.

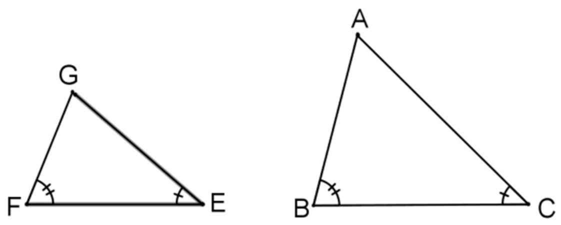
(2)الارتفاعات المتناظرة متناسبة ولهما نفس نسبة التشابه.

(3)المتوسطات المتناظرة متناسبة ولهما نفس نسبة التشابه.

مسلمة التشابه (AAA)

نظرية 3 :
مسلمة التشابه: AAA
يتشابه المثلثان إذا تساوت قياسات زوايا المثلث الأول الزوايا المناظرة لها في المثلث الآخر. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار $(A.A.A)$. وبالطبع يكفي إثبات التشابه بتساوي زاويتين فقط، لأن ذلك يقتضي تساوي الزاوية الثالثة في كل مثلث

على الشكل:



في $\Delta ABC, \Delta GFE$ بما أن:

$\angle B = \angle F, \angle E = \angle C$.

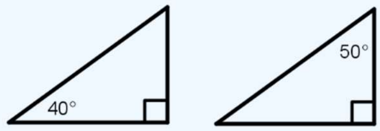
إذن يتشابه المثلثين وينتج أن

$$\frac{AB}{GF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{EG}.$$

تدريبات

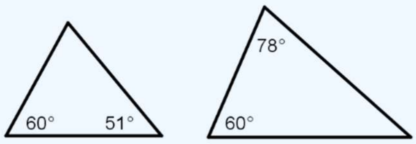
في التدريبات (9 – 1) حدد المثلثين المتشابهين، وإذا لم تتوصل لاستنتاج فاكتب "لا يمكن الاستنتاج".

(1)



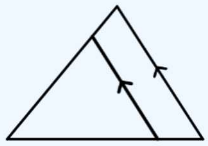
....

(2)



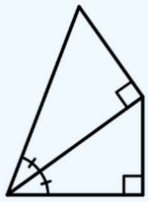
....

(3)



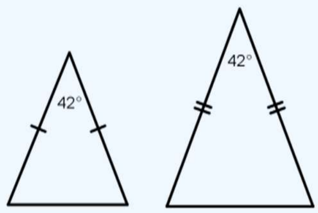
....

(4)



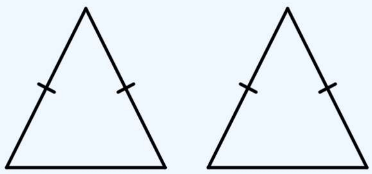
....

(5)



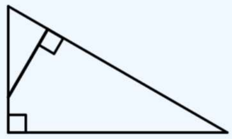
....

(6)



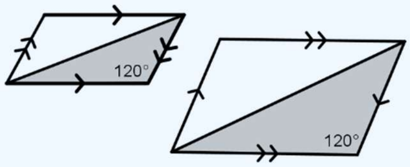
....

(7)



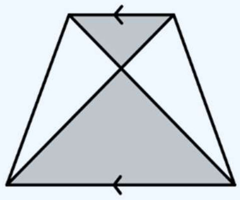
....

(8)



....

(9)



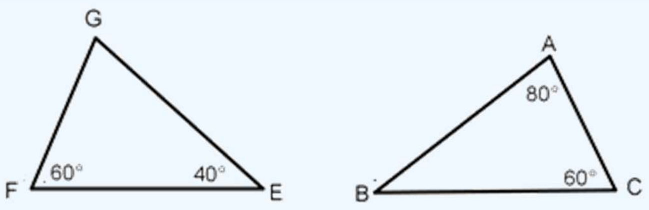
....

(10) انظر الشكل التالي ثم ضع الرموز على المثلثين وأكمل

$$\angle ABC = \_\_\_\_\_\_$$

$$\Delta ABC \sim \_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{AB}{.....} = \frac{BC}{.....} = \frac{AC}{.....}$$

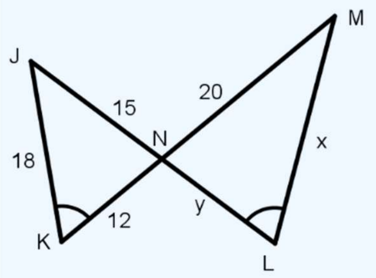


(11) انظر الشكل ثم أكمل

$\Delta JKN \sim \dots\dots\dots\dots\dots$ (a

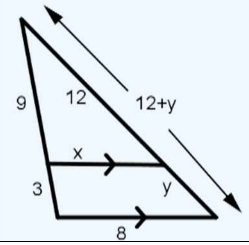
(b $\frac{18}{.....} = \frac{15}{.....}$, $\frac{15}{.....} = \frac{12}{.....}$.

$x = \cdots$, $y = \cdots$ (c

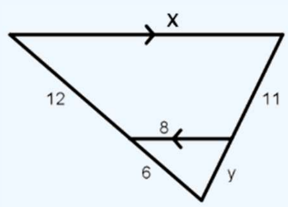


في التدريبات (12 – 14) أوجد قيمة x, y.

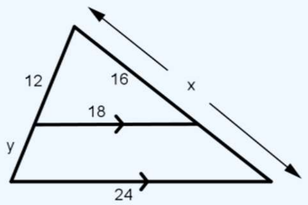
(12)



(13)



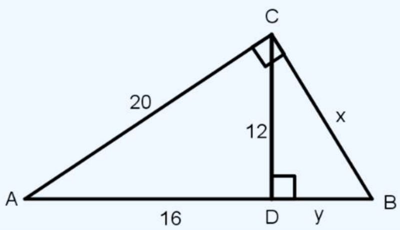
(14)



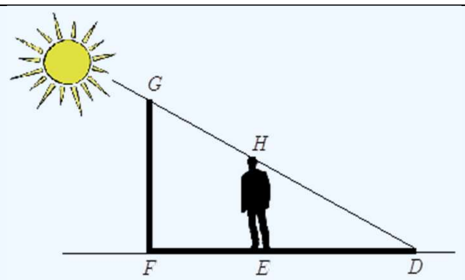
(15) على الشكل التالي:

(a سمّ مثلثين يشابهان المثلث ABC

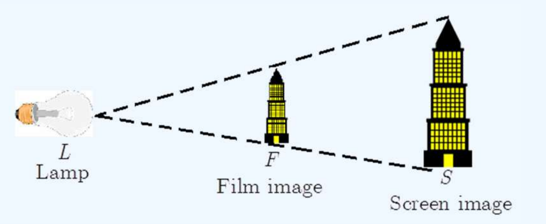
(b أوجد قيمة x, y.



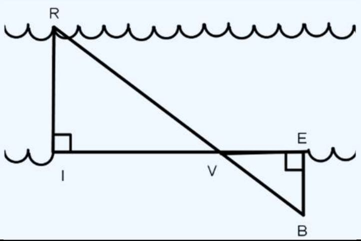
(16) لتقدير ارتفاع عمود كرة السلة، وقف أحد اللاعبين والذي طوله بالضبط يساوي $2m$ بحيث تكون نهاية ظله مع نهاية ظل العمود منطبقتين تماما، وعند ذلك وجدنا أن $DF = 4.4DE = 1.6$,
أوجد طول العمود.



(17) على الشكل التالي: القياسات ليست حقيقة، وفيه تظهر صورة البناية في الفيلم وعلى الشاشة، فإذا كانت $LF = 6cm, LS = 24m$ ،وكان طول البناية على الشاشة يساوي $2.2m$. ما هو طول البناية في الفيلم.



(18) على الشكل إذا كان $IV = 63m, VE = 20m, BE = 15m$ أوجد عرض النهر RI.



نظريات التشابه $(SAS),(SSS)$

نظرية 4:

يتشابه المثلثان إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتوي هاتين الزاويتين. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار $(S.A.S)$.

نظرية 5:

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار $(S.S.S)$.

إذن لكل مثلثين متشابهين:

(1) الأضلاع المتناظرة متناسبة.

(2) الارتفاعات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

(3) المتوسطات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

(4) منصفات الزوايا المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

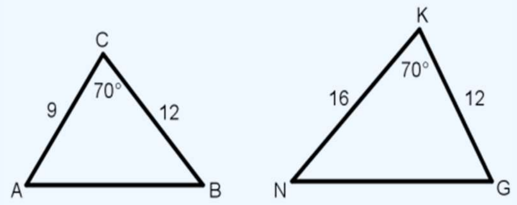
(5) طولا محيطيهما لهما نفس نسبة التشابه.

(6) النسبة بين مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه.

تدريبات

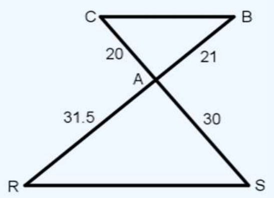
في التدريبات (24 – 19) حدد المثلثين المتشابهين، وكذلك النظرية أو النتيجة التي تثبت ذلك.

(19)



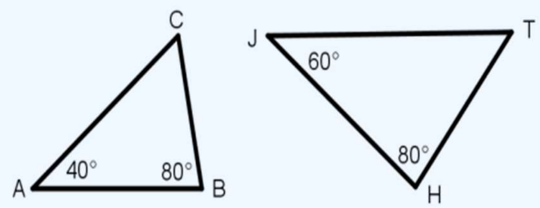
....

(20)



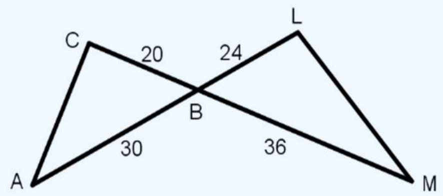
....

(21)



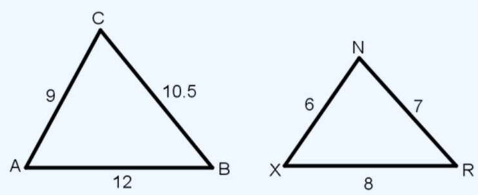
....

(22)



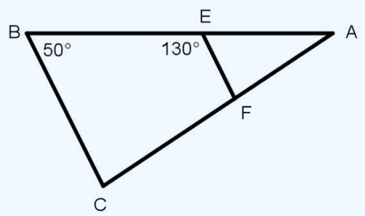
....

(23)



....

(24)



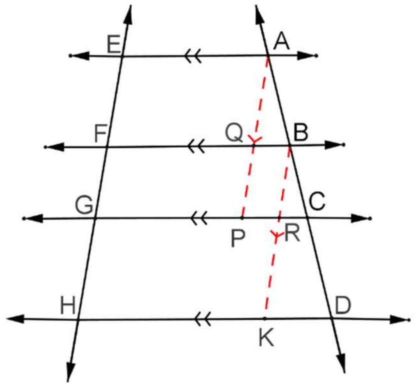
....

الأطوال المتناسبة

نظرية 6 : (نظرية طالس العامة)

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع القطع الناتجة على القاطع الآخر.

البرهان:



لدينا هنا $AE \parallel BF \parallel GC \parallel HD$ يقطعهم المستقيمان AD, EH والمطلوب

إثبات أن:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FG}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{GH}}$$

ولبرهان هذه النظرية نرسم AP, BK *يوازيان* EH *كما بالشكل المجاور. وبما أن:*

$\mathrm{AQFE}, \mathrm{QPGF}, \mathrm{BRGF}, \mathrm{RKHG}$ *متوازيات أضلاع.*

إذن

$\mathrm{AQ} = \mathrm{EF}, \mathrm{BR} = \mathrm{QP} = \mathrm{FG}, \mathrm{RK} = \mathrm{GH}$.

وبما أنه في $\Delta\mathrm{APC}$ ، $\mathrm{BQ} \parallel \mathrm{PC}$ ، *إذن*

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FG}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FG}}$$

وبالمثل في $\Delta\mathrm{BKD}$ ، $\mathrm{BQ} \parallel \mathrm{PC}$ ، *يمكننا الحصول على*

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RK}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GH}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FG}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{GH}}$$

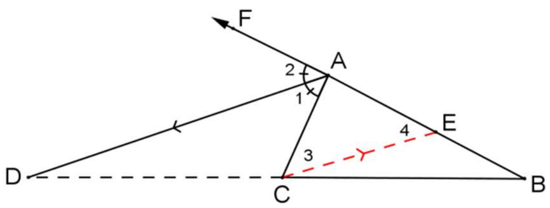
إذن

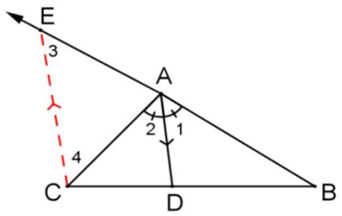
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

نظرية 7 :
إذا رسم مستقيم يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة

نظرية 8 :(نظرية منصف الزاوية)
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة له عند هذه الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي ضلعي المثلث الآخرين.

البرهان:





شكل   شكل

في شكل 1: الشعاع AD ينصف $\angle CAB$ ويقطع BC في D.

في شكل 2: الشعاع AD ينصف $\angle CAF$ ويقطع الشعاع BC في D

والآن المطلوب إثبات أن $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. ولإثبات ذلك نرسم $CE \parallel AD$ يقطع AB في E .

إذن

$$\angle 1 = \angle 3 \ \square\ \angle 2 = \angle 4$$

إذن

$$\angle 3 = \angle 4.$$

ومن ذلك

$$AE = AC.$$

بما أن

$$CE \parallel AD.$$

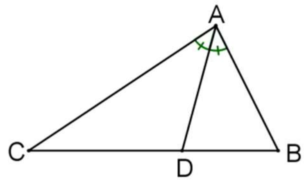
إذن

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}.$$

وعليه نصل إلى المطلوب

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

ملاحظات:

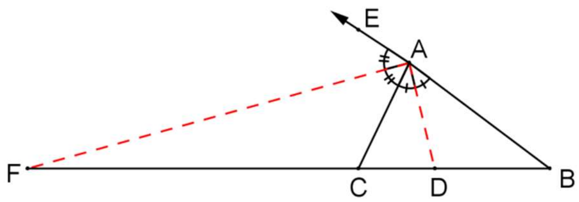


(1) يتحقق عكس النظرية فإذا كان D تقسم BC بحيث

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

فإن AD ينصف $\angle A$.

(2) AF, AD المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية A.



من نظرية منصف الزاوية

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC},$$

إذن

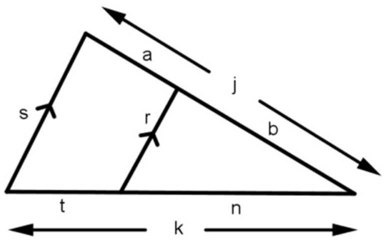
$$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{DC}.$$

ملاحظة مهمة:

قياس الزاوية بين المنصفين الداخلي والخارجي لنفس الزاوية= $90°$

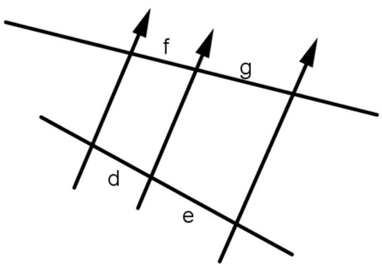
تدريبات

(1) انظر الشكل التالي، ثم حدد أي التناسبات التالية صحيحة.



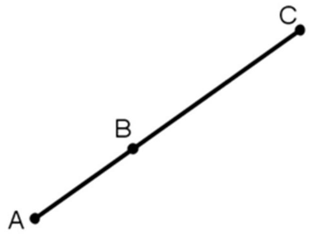
الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{r}{s}=\frac{a}{b}$	
(b)	$\frac{t}{k}=\frac{a}{j}$	
(c)	$\frac{j}{a}=\frac{s}{r}$	
(d)	$\frac{r}{s}=\frac{n}{k}$	
(e)	$\frac{a}{b}=\frac{n}{t}$	
(f)	$\frac{b}{j}=\frac{t}{k}$	

(2) انظر الشكل التالي، ثم حدد أي التناسبات التالية صحيحة.



الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{d}{f}=\frac{g}{e}$	
(b)	$\frac{f}{g}=\frac{e}{d}$	
(c)	$\frac{g}{f}=\frac{e}{d}$	
(d)	$\frac{d}{f}=\frac{e}{g}$	

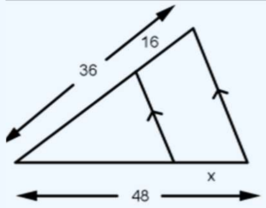
في التدريبات (3 – 6) أكمل الجدول التالي إذا كان $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$.



	(3)	(4)	(5)	(6)
AB	6			
BC		25		
AC			56	100

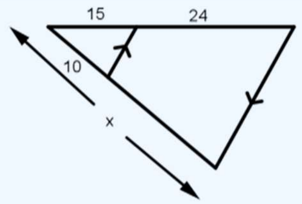
في التدريبات (7 – 15) أوجد قيمة x, y.

(7)



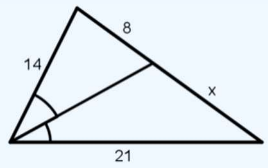
....

(8)



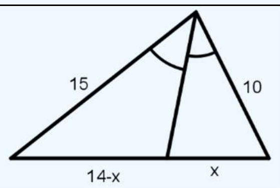
....

(9)



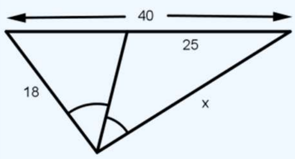
....

(10)



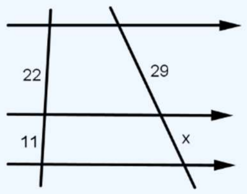
....

(11)



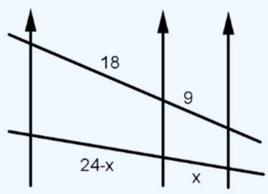
....

(12)



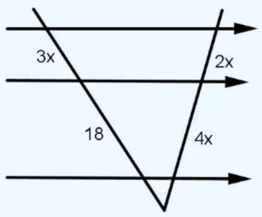
....

(13)



....

(14)



....

الوحدة الثالثة: نظرية الاعداد

الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية

يمكن تقسيم الأعداد الصحيحة لنوعين من الأعداد، أعداد تقبل القسمة على 2 وتسمى أعداد زوجية، أما بقية الأعداد التي لا تقبل القسمة على 2 فتسمى أعداد فردية.

يمكن كتابة العدد الصحيح الزوجي على صورة $2n$ حيث n عدد صحيح،

كما يمكن كتابة العدد الصحيح الفردي على صورة $2n + 1$ حيث n عدد صحيح.

العدد الصحيح إما أن يكون زوجياً أو فردياً ولا يمكن أن يكون كلاهما.

بعض الخواص الأخرى:

(1) فردي ≠ زوجي.

(2) فردي + زوجي = زوجي + فردي = فردي ، فردي - زوجي = زوجي - فردي = فردي.

(3) زوجي± زوجي = زوجي ، فردي ± فردي = زوجي.

(4) إذا كان ناتج ضرب عددين صحيحين زوجيًا فإن أحدهما على الأقل زوجي.

(5) ناتج ضرب عددين صحيحين متتاليين يجب أن يكون زوجي.

(6) إذا كان مجموع (أو فرق) أعداد صحيحة فرديًا، فإن عدد الأعداد الفردية في تلك الأعداد فرديًا.

(7) إذا كان مجموع (أو فرق) أعداد صحيحة زوجيًا، فإن عدد الأعداد الفردية في تلك الأعداد زوجي.

(8) إذا كان ناتج ضرب أعداد صحيحة فرديًا، فإن جميع تلك الأعداد يجب أن يكون فردية.

(9) إذا كان ناتج ضرب أعداد صحيحة زوجيًا، فإن عدد على الأقل من تلك الأعداد يجب أن يكون زوجيًا.

مثال 1:

حدد أي الأعداد التالية زوجي وايها فردي: $102, 203, 519, 3340, 70015, 87654$ وأوجد نمطاً للأعداد الفردية والزوجية.

الحل:

العدد 102 عدد زوجي لأنه يمكن كتابته على صورة العدد الزوجي $102 = 2(51)$.

203 فردي لأنه يمكن كتابته على صورة العدد الفردي $203 = 2(101) + 1$.

$519 = 2(259) + 1$ إذا هو عدد فردي.

$3340 = 2(1670)$ إذا هو عدد زوجي.

$70015 = 2(35007) + 1$ إذا هو عدد ....

$87654 = 2(43827)$ إذا هو عدد ....

إذا كانت خانة الآحاد للعدد هي 1,3,5,7,9 فإنه عدد ....

إذا كانت خانة الآحاد للعدد هي 0,2,4,6,8 فإنه عدد ....

مثال 2:

إذا جمعنا عددين زوجيين، فإن الناتج عدد:

(a) زوجي. (b) فردي.

الحل:

(a) بما أن العددين زوجيين، فإن خانة الآحاد لكليهما هي 0,2,4,6,8 إذا عند جمع هذين العددين، فإن خانة الآحاد للمجموع أيضا ستكون أحد الأعداد 0,2,4,6,8.

بالمثل هل تستطيع أن تحدد ما يلي:

إذا جمعنا عددين فرديين، فإن الناتج عدد:

(a) زوجي. (b) فردي.

إذا جمعنا عدد فردي وزوجي، فإن الناتج عدد:

(a) زوجي. (b) فردي.

مثال3 :

إذا اخترنا ثلاثة أعداد صحيحة عشوائياً a, b, c ، فإن الأعداد التالية:

$\frac{c+a}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+b}{2}$:

(a) كلها ليست صحيحة. (b) أحدها على الأقل صحيح.

(c) اثنان منها على الأقل صحيحان. (d)كلها صحيحة.

الحل:

(b) أحدها على الأقل صحيح.

وذلك لأن هناك حالتان:

الأولى: الأعداد a, b, c كلها من نفس النوع(كلها زوجية، أو كلها فردية)، وفي تلك الحالة مجموع أي اثنين منهم سيكون زوجيًا وبالتالي الأعداد الثلاثة $\frac{c+a}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+b}{2}$ ستكون كلها صحيحة.

الثانية: الأعداد a, b, c ليست كلها من نفس النوع، وبالتالي يوجد اثنان منها من نوع والثالث من نوع آخر (عددان فرديان والثالث زوجي، أو العكس)، وبهذا يكون مجموع العدين من نفس النوع زوجيًا، ومجموع العدد الثالث مع أي منهما فرديًا، وبالتالي الأعداد الثلاثة التالية $\frac{c+a}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+b}{2}$سيكون أحدها فقط صحيحًا.

مثال 4:

إذا علمت أن مجموع 100 عدد صحيح موجب هو 10000 وأن عدد الأعداد الفردية فيها أكثر من عدد الأعداد الزوجية، أوجد أكبر عدد ممكن للأعداد الزوجية.

الحل:

بفرض أن عدد الأعداد الزوجية هو x، عدد الأعداد الفردية y حيث $x < y$ وبإضافة x للطرفين نحصل على $2x < x + y$ ومنها $2x < 100$ ومنها $x < 50$.

إذا جعلنا أكبر عدد ممكن للأعداد الزوجية هو 49 وقطعاً سيكون مجموعها زوجيًا، فيكون عدد الأعداد الفردية 51 ويكون مجموعها فرديًا، فيصبح مجموع الـ 100 عدد عددًا فرديًا وهذا يناقض أن يكون 10000.

عندما عدد الأعداد الزوجية هو 48 سيكون عدد الأعداد الفردية 52 يكفينا أن نثبت تحققه كالتالي:

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{52time} + \underbrace{2+2+\dots+2}_{47time} + 9854 = 10000$$

(أو أي طريقة أخرى). وبالتالي أكبر عدد ممكن للأعداد الزوجية هو 48.

مثال5:

لدينا n عدداً: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ كل منها إما 1 أو -1. فإذا كان:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$$

ماذا يمكن أن يقال عن n ؟

(a) زوجية. (b) فردية. (c) مضاعف للعدد 4. (d) لا يمكن التحديد.

الحل:

(c) مضاعف للعدد 4.

يحتوي المجموع:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

على n من الحدود كل منها إما 1 أو -1. وبهذا يجب أن يكون n عدداً زوجياً. أي $n = 2k$ حيث k عدد صحيح موجب.

من الواضح أن k من الأعداد $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ قيمة كل منها 1، وأن k منها قيمة كل منها -1.

ومن ناحية أخرى لدينا $(x_1x_2).(x_2x_3),\dots.(x_nx_1) = x_1^2x_2^2\dots.x_n^2 = 1$.

إذن $(-1)^k(1)^k = 1$ وبهذا يكون k عدداً زوجياً. ومن ثم $n = 2k = 4m$ حيث m عدد صحيح موجب.

لاحظ أن العكس صحيح أيضاً. أي لكل عدد صحيح n حيث $n = 4m$ يوجد أعداد صحيحة $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تحقق $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$.

على سبيل المثال ضع:

$$x_1 = x_4 = x_5 = x_8 = \dots = x_{4m-3} = x_{4m} = 1،$$

$$x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = \dots = x_{4m-2} = x_{4m-1} = -1.$$

تدريبات:

(1) *أوجد نوع العدد الصحيح*

$$\frac{1221450987543567886333454214938}{2}$$

بدون إيجاد قيمة العدد نفسه مع التوضيح.

(2) لدينا 50 كتاب نريد أن نضعهم في 5 صناديق، كيف يمكننا أن نفعل ذلك بحيث يكون في كل صندوق عدد فردي من الكتب؟

(3) إذا علمت أن a, b عددان صحيحان متتاليان، $c = ab$ ، $N^2 = a^2 + b^2 + c^2$. حدد نوع العدد N من حيث كونه زوجياً أو فردياً مع التوضيح.

(4) **تحدي:** في هذا النمط من الأعداد....,1,2,5,13,34,89 ، إذا أخذت أي ثلاث حدود متتالية وجمعت الأول والثالث تجد الناتج ثلاثة أمثال الثاني

(مثلاً لو أخذنا 1,2,5 **نجد** $1 + 5 = 3(2)$ **، لو أخذنا** 2,5,13 **نجد** $2 + 13 = 3(5)$ **وهكذا).**

السؤال ما نوع العدد الذي ترتيبه 2003 (من حيث كونه زوجياً أم فردياً)؟

(5) معطى ثلاثة أعداد صحيحة x, y, z اثنان منها فردي والثالث زوجي.

أثبت أن العدد

$$(x + 1)(y + 2)(z + 3)$$

يجب أن يكون زوجياً.

(6) إذا كان يمكنك إضافة علامة واحدة من "+" أو "-" بين أي عددين متتاليين في القائمة:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots\ldots \quad 2017$$

هل الناتج سيكون فردياً أم زوجياً؟

(7)

a) لدينا العبارة:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0.$$

هل من الممكن استبدال النجوم بعلامات $+, -$ لتصبح العبارة صحيحة .

b) نفس السؤال للعبارة

$$.1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0$$

(8) في مسابقة للشطرنج كل لاعب سيلعب 20 مباراة. المباراة التي سيكسبها اللاعب يسجل له 3 نقاط، والمباراة التي يتعادل فيها يسجل له نقطة واحدة، والمباراة التي يخسرها تخصم منه نقطة. السؤال هل من الممكن أن يحصل لاعب على 39 نقطة؟ مع التعليل؟

(9)

a) يوجد 10 سلات موضوعة على دائرة. هل من الممكن وضع برتقالات في كل سلة بحيث الفرق بين عدد البرتقال في كل سلتين متجاورتين هو 1؟

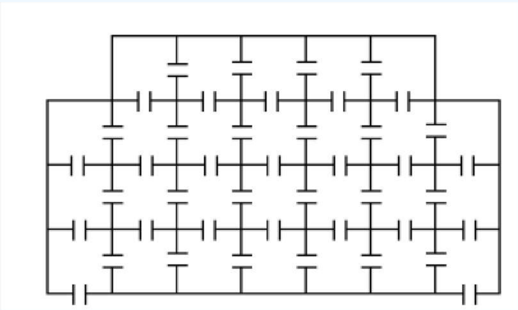
b) ماذا إذا كان هناك 9 سلات ؟ برر إجابتك في كل حالة.

(10) دودة تتحرك على خط مستقيم يمكنها أن تقفز في كل قفزة 6 أو 8 سنتيمتر في أحد الاتجاهين (**يمين أو يسار**). هل يمكنها الوصول إلى نقطة تبعد عن موضعها الأصلي:

$(a)1.5$ سم　　$(b)7$ سم　　$(c)4$ سم.

(11) **تحدي:** كيف يمكنك ترتيب الأعداد العشرة 1,1,2,2,3,3,4,4,5,5 في صف بحيث يوجد عدد واحد بين العددين 1,1، وعددين بين العددين 2,2، وثلاثة أعداد بين العددين 3,3، وأربعة أعداد بين العددين 4,4، وخمسة أعداد بين 5,5؟

(12) **تحدي:** كيف يمكنك زيارة ال 26 غرفة كل غرفة مرة واحدة فقط دون أن تكرر المرور على إحدى الغرف؟



الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة

مراجعة:

- من بين كل الأعداد الصحيحة الموجبة العدد 1 هو العدد الوحيد الذي له قاسم موجب وحيد، وهو الواحد نفسه.
- كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 لها على الأقل قاسمان موجبان.
- إذا كان العدد الصحيح الموجب له فقط قاسمان موجبان **- وهما** 1 **والعدد نفسه-** سُمي العدد **أولي.**
- كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 والتي ليست أولية تسمى **أعداد مؤلفة.**

من التعريفات السابقة نستنتج:

- العدد 1 ليس أولي ولا مؤلف،
- يوجد عدد زوجي أولي وحيد وهو 2 وهو أصغر عدد أولي،
- أصغر عدد مؤلف هو 4.

كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 يمكن تحليلها لعواملها الأولية. بمعنى:

$$N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{\alpha_k}$$

حيث $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ أعداد أولية مختلفة ، و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ أعداد صحيحة غير سالبة ،

وسيكون عدد قواسم N الموجبة هي:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)....(\alpha_k + 1)$$

مثال 1:

إذا كان $p, p^3 + 5$ عددين أوليين ، فإن $p^5 + 7$ عدد (......................)

(a) أولي. (b) مؤلف. (c) أولي أو مؤلف. (d) لا أولي ولا مؤلف.

الحل:

الإجابة (b) مؤلف.

إذا كانت p عدد فردي فإن $p^3 + 5$ عدد زوجي أكبر من 5 وهذا يناقض كونه أوليًا، وبالتالي p عدد زوجي وأولي، ومن ثم $p = 2$ ، بالفعل $p^3 + 5 = 13$ أولي ، وعندها $p^5 + 7 = 2^5 + 7 = 39$ عدد مؤلف.

مثال 2:

معطى ثلاثة أعداد أولية p, q, r تحقق $p < q, p + q = r$ أوجد قيمة p.

الحل:

إذا كانت r زوجي فلدينا حالتان:

الأولى: p, q كلاهما زوجي وعندها $p = q = 2$. وهذا يناقض $p < q$.

الثانية: p, q كلاهما فردي وعندها سيكون r عدد زوجي أكبر من 2. وهذا يناقض كون r عدد أولي.

وبالتالي r عدد فردي، ومن ثم p, q أحدهما فردي والآخر زوجي، ولأن أصغر عدد أولي هو 2. فإن $p = 2$.

تدريبات:

(1) معطى أن x, y أوليان، أوجد عدد الثنائيات المرتبة حلول المعادلة $x + y = 75$.

$A)\ 1$ $B)\ 2$ $C)\ 3$ $D)\ 4$

(2) لنسمي العدد الأولي المكون من خانتين $\underline{ab}$ عدداً مشاغباً إذا كان العدد $\underline{ba}$ أيضاً أولي.

السؤال: كم عدد أولي من خانتين مشاغب؟

(3) معطى الأعداد الأولية المختلفة a, b, c تحقق المعادلة

$$ab^b c + a = 2000$$

أوجد كل القيم الممكنة للعدد $a + b + c$

(4) معطى أن الأعداد $p, q, p - q$ أولية، $p + q$ عدد زوجي. أوجد قيمة

$$(1 + \frac{1}{2})^p (1 - \frac{1}{3})^q$$

(5) **تحدي:** إذا علمت أن n عدد صحيح موجب بحيث $n + 3, n + 7$ عددان أوليان، أوجد باقي قسمة n على 3.

(6) **تحدي:** إذا كان p عدد أولي ليس أقل من 5، العدد $2p + 1$ أولي ايضاً، اثبت أن $4p + 1$ عدد مؤلف.

(7) لدينا المعادلة: $56a = 65b$. أثبت أن لكل زوج مرتب طبيعي (a, b) يمثل حل للمعادلة فإن $a + b$ يكون عدداً مؤلفاً.

(8) لدينا $m > n$ عددان صحيحان موجبان بحيث

$$m^2 - n^2 - 2m - 2n = 19$$

أوجد قيمة m, n.

(9) معطى ثلاثة أعداد أولية p, q, r تحقق

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1661}{1986}$$

أوجد قيمة $p + q + r$

(10) إذا علمت أن m,n عدادان أوليان مختلفان ، $p = m + n + mn$. عندما p قيمة صغرى. ما قيمة المقدار

$$\frac{m^2 + n^2}{p^2}$$

(11) إذا علمت أن p,q أعداد أولية، $p = m + n, q = mn$ حيث m,n عددان صحيحان موجبان.

فأوجد قيمة المقدار

$$\frac{p^p + q^q}{m^n + n^m}$$

(12) إذا كان p,q عددان أوليان يحققان المعادلة:

$$5p + 7q = 129$$

فأوجد قيم $p + q$

(13) **تحدي:** معطى أن $p\ ,\ \ p + 2\ ,\ \ p + 6\ ,\ \ p + 8\ ,\ \ p + 14$ أعداد أولية. أوجد العدد p

(14) ليكن p,q عددان متتاليان وأوليان ، العدد الصحيح الثابت n يحقق أن:

$$\{n - 1, 3n - 19, 38 - 5n, 7n - 45\} = \{p, 2p, q, 2q\}$$

ليس بالضرورة بهذا الترتيب. أوجد قيمة n

(15) **تحدي :**أثبت أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم الصحيحة الموجبة للعدد n تجعل العدد $n^2 + n + 41$ مؤلفاً.

الوحدة الرابعة: التركيبـــــات

مبادئ العد

قبل التعمق في مبادئ العد التالية، من الضروري مراجعة المفاهيم التي تناولناها سابقًا

مراجعة: مبدأي العد الأساسيين

مبدأ الضرب: إذا كانت الحادثة A تحدث بـــ m طريقة مختلفة والحادثة B تحدث بـــ n طريقة مختلفة، وكان الحدثان مستقلين، فإن الحدثين يمكن أن يتما معاً بـــ $m \cdot n$ طريقة.

مبدأ الجمع: إذا كانت الحادثة A تحدث بـــ m طريقة مختلفة والحادثة B تحدث بـــ n طريقة مختلفة، وكان الحدثان متنافيين، فإن حدوث الحادثة A أو B سيكون بـــ $m + n$ طريقة مختلفة.

تدريبات:

(1) يقدم أحد المطاعم شطائر لحم بثلاثة أحجام (صغير- وسط-كبير)، بالجبن أو الطماطم أو بدونها. وأراد فيصل أن يطلب شطيرة جبن. بكم طريقة يمكنه عمل ذلك؟

(2) محل أحذية لديه 6 أنواع من الأحذية وكل نوع متوفرة بسبع ألوان. كم عدد الأحذية المختلفة المتوفرة في هذا المحل؟

(3) يتسابق سلمان وأسامه وخالد، بكم طريقة سينتهي السباق إذا كان ممكن أن يتعادل 2 منهم أو أكثر؟

(4) يطلب البنك الأهلي من عملائه الجدد أن يختاروا رقم سري مكون من 4 خانات مختلفة من الأعداد من 1 إلى 5 ويشترط أن يكون القيمة المطلقة للفرق بين كل خانة والتي يليها 2 على الأقل، بكم طريقة يمكن للعميل اختيار الرقم السري؟

(5) بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب رياضيات مختلفة وأربعة كتب كيمياء مختلفة وخمسة كتب فيزياء مختلفة على أحد رفوف مكتبة بشرط أن تكون كتب الموضوع الواحد بجانب بعضها البعض؟

أولا: عدد الأعداد والأشرطة

- **عدد طبيعي من** n ***خانة:*** نقول أن العدد الطبيعي مكون من منزلة (خانة) واحدة أو أكثر إذا كانت أكبر خانة غير صفرية.

مثلا: العدد 2345 مكون من أربع منازل، ولكن لا نعتبر العدد 034 مكون من ثلاث منازل لأن الصفر في المنزلة الأكبر لا يعتد به، ويكتب العدد على الصورة 34 أي أن العدد مكون منزلتين فقط.

- **شريط من الأرقام:**

نقول إن الشريط مكون من منزلة أو أكثر بغض النظر عن أكبر منزلة هل هي صفر أم لا.

مثلا: كل مما يلي 01234 و00034 و12302 شريط مكون من خمس منازل.

- **الأعداد المتناظرة:**

نقول إن العدد الطبيعي متناظر إذا تحقق أن قراءة أرقام العدد من اليمين إلى اليسار مطابقة لقراءة أرقام العدد من اليسار إلى اليمين.

مثلاً: الأعداد 1234321 و919 و6 أعداد متناظرة، بينما العدد 2342 غير متناظر.

سوف يساعدنا مبدأي العد لحساب عدد الأعداد أو الأشرطة المطلوبة بطريقة مبسطة وعميقة. هيا لنبدأ رحلة الإبداع!

تدريبات:

(6) كم عدد صحيح موجب مكون من أربع خانات مختلفة؟
(7) كم عدد صحيح فردي موجب مكون من خمس خانات؟
(8) كم عدد ذو خانتين يمكن تكوينه من أرقام المجموعة {0,3,4,5,6,7,8,9}، بشرط أن يكون مجموع أرقامه فردياً؟
(9) كم عدد بين 0 و1000 يحوي الرقم 5 مره واحده فقط؟
(10) كم عدد يقبل القسمة على 3 وله 3 خانات مختلفة يمكن تكوينه من أرقام المجموعة {1,3,7,8,9}؟
(11) كم عدد الأشرطة ذات 10 منازل، والتي تتكون من واحدات وأصفار فقط بشرط أن تحوي بالضبط خمسة أصفار متجاورة؟
(12) كم عدد الأعداد ذات الخمس خانات، والتي تحقق أن مجموع منزلته الأولى ومنزلته الخامسة يساوي 5؟
(13) كم عدد الأعداد المكونة من ست منازل وكل منازلها من نفس النوعية (كلها زوجية أو كلها فردية)؟
(14) كم عدد صحيح موجب ذو 4 خانات، وله بالضبط خانه واحدة "1"، وبالضبط خانة واحدة "3"؟
(15) كم عدد الأعداد المكونة من 3 منازل لها على الأقل منزلة زوجية واحدة؟
(16) كم عدد مكون من أربع خانات بشرط عدم تجاور خانتان زوجيتان؟

(17) كم عدد صحيح موجب اقل من 1000 لا يحتوي الرقم 7؟

(18) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من خمس خانات مختلفة والتي تحقق أن الفرق الموجب بين أول خانة وآخر خانة يساوي 2؟

(19) عند كتابة الأعداد من 1 إلى 100 كم مرة سنكرر كتابة العدد 6؟

(20) كم عدد متناظر له:

a) 6 خانات مكونة من الأعداد $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

b) 7 خانات مكونة من نفس الأعداد السابقة.

c) 5 خانات مكونة من الأعداد $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

ثانيًا: عدد الكلمات

يمكن حساب عدد الكلمات الإنجليزية المكونة من n حرف باستخدام مبدأ الضرب بشكل مباشر (ليس بالضرورة أن يكون لها معنى).

مثال: عدد الكلمات المتكونة من 4 أحرف يساوي

الحرف الرابع		الحرف الثالث		الحرف الثاني		الحرف الأول	
أي حرف		أي حرف		أي حرف		أي حرف	**عدد الكلمات**
26 طريقة	×	26 طريقة	×	26 طريقة	×	26 طريقة	$=26^4$

تدريبات:

(21) كم عدد الكلمات المكونة من 5 حروف مختلفة.

(22) كم عدد طرق ترتيب حروف كلمة $PRODUCT$ ؟

(23) كم عدد الكلمات المكونة من 6 أحرف بشرط أن يكون الحرف الأول والثالث والسادس مختلفة؟

(24) كم كلمة مكونة من 3 حروف يكون فيها حرف M مرة واحدة فقط؟

(25) كم كلمة مكونة من 3 حروف يكون فيها حرف M مرة واحدة على الأقل وممنوع تكرار أي حرف آخر؟

(26) كم كلمة مكونة من 3 حروف يكون فيها حرف M مرة واحدة على الأقل ومسموح بتكرار حرف آخر (قد يظهر حرف آخر مرتين)؟

(27) لغة الهرميثيان تتكون من ثلاث حروف فقط. في لغتهم أطول كلمة تحتوي على الأكثر 4أحرف. كم عدد كلمات هذه اللغة؟

(29) كم عدد الكلمات المتناظرة المكونة من سبعة أحرف والتي لا تبدأ بحرف علة؟ حروف العلة هي (A,E,I,U,Y).

(30) كم عدد طرق كتابة الحروف الإنجليزية كلها في صف بشرط أن يوجد بالضبط خمسة أحرف بين الحرفين x و y ؟

التباديل

التباديل: إذا كان لدينا مجموعة تحوي n من الاشياء وأردنا اختيار k منها مع مراعاة الترتيب وبدون تكرار، فإن عدد الاختيارات هو:

$$^{n}P_{k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

ويقرأ n تباديل k

بعد ان تعرفنا على مفهوم التباديل، نرى التدريب التالي:

مثال:

بكم طريقة يمكن للأصدقاء أحمد ومحمد ويونس وحمزة وهاشم أن يقفوا في صف واحد لالتقاط صورة جماعية؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم في صف لالتقاط الصورة؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم على الأقل في صف لالتقاط الصورة؟

الحل:

عند ترتيب الأصدقاء الخمسة جميعًا في صف: عدد الطرق $^{5}P_{5} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

وعند ترتيب ثلاثة فقط منهم: عدد الطرق $^{5}P_{3} = 60$

وعند ترتيب ثلاثة على الأقل: عدد الطرق $^{5}P_{3} + {}^{5}P_{4} + {}^{5}P_{5} = 60 + 120 + 120 = 300$ **طريقة.**

ملاحظة: يمكننا كتابة $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ كـ $5!$ ويقرأ مضروب 5.

أحسب $3!$, $4!$ ؟ وماذا تلاحظ؟

ملاحظة: لأي عدد صحيح موجب n، لدينا $n! = (n-1)!\cdot n$

المضروب: مضروب n هو حاصل ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة التي اقل من او تساوي n ويرمز لها بعلامة التعجب (!):

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

لاحظ ان:

$$^{n}P_{n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

وهو يمثل ترتيب n من الاشياء في صف واحد مع مراعاة الترتيب

تدريبات:

(31) ملعب كرة قدم له خمسة عشر باب. بكم طريقة يمكنك الدخول من باب والخروج من باب آخر؟

(32) في صالة اجتماعات توجد 7 مصابيح. لنحافظ على الانارة مناسبة للصالة يجب أن تكون واحدة على الأقل من المصابيح مشتغلة. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

ملاحظة: بنفس طريق التدريب الاخير السابق، يمكن استنتاج مباشرة من قاعدة الضرب أن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوى n عنصراً هو 2^n حيث إن كل عنصر له حالتين بالنسبة للمجموعة الجزئية فإما ينتمي أو لا ينتمي.

أي أن:

عد المجموعات الجزئية: عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوى n عنصر يساوي 2^n

تدريبات:

(33) لدينا المجموعة $\{1,2,3,\ldots,8\}$،

(a) كم عدد المجموعات الجزئية منها؟

(b) كم عدد المجموعات الجزئية منها والتي لا تحوي عدد فردي؟

(c) كم عدد المجموعات الجزئية منها والتي تحوي عدد فردي واحد فقط؟

(34) لدينا لوحة مربعة مقسمة مربعات متطابقة بعدي اللوحة 2026×2026 وأردنا نظلل المربعات في اللوحة بحيث نظلل مربع واحد بالضبط في كل صف وفي كل العمود. (بفرض أن التدوير والقلب يعطي أشكال مختلفة)

a) بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

b) لو اشترطنا عدم تظليل المربعات في الزوايا بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

(35) كم عدد مكون من أربع خانات فيه خانتين متطابقتين فقط وتحوي خانة الألوف فيه رقم أصغر من 3؟

(36) من مجموعة تحتوي على 9 عناصر،

كم عدد المجموعات الجزئية الغير خالية التي تحتوي على عدد زوجي من العناصر؟

(37) كم عدد مكون من 5 خانات مختلفة بحيث اول واخر خانة عددان زوجيان؟

(38) في دوري كرة القدم، يرغب المنظمون في اختيار 3 فرق ليتم تتويجهم في الحفل السنوي، بحيث يحصل الفرق المختارة على مراكز مختلفة: الأول، الثاني، والثالث. يختار كل فريق فائز لاعب منهم لاستلام الجائزة.

إذا كان في الدوري 12 فريقًا، ويضم كل فريق 25 لاعبًا، فبكم طريقة يمكن اختيار الفرق الثلاثة مع تحديد اللاعبين؟

حلــول التدريبات

حلول (الجبر)

النسبة المئوية:

تدريبات:

(1)

لأن:

$$\frac{7}{x+y}=\frac{k}{x+z}\Longrightarrow k(x+y)=7(x+z)\longrightarrow(1)$$

وبنفس الطريقة:

$$\frac{k}{x+z}=\frac{11}{z-y}\Longrightarrow k(z-y)=11(x+z)\longrightarrow(2)$$

وبجمع المعادلتين:

$$k(x+y)+k(z-y)=18(x+z)$$

$$\Rightarrow kx+ky+kz-Ky=18(x+z)$$

$$\Rightarrow k(x+z)=18(x+z)\Longrightarrow k=18$$

(2)

لأن:

$$\frac{b+2}{2}=\frac{8}{c+3}\Longrightarrow(b+2)(c+3)=16$$

وبالتالي لدينا الاحتمالات التالية:

- *وهذا مرفوض لأن b عدد طبيعي* $(b+2)(c+3)=1\times16\Longrightarrow b=-2\,,c=13$
- *وهذا مرفوض لأن b عدد طبيعي* $(b+2)(c+3)=2\times8\Longrightarrow b=0\,,c=5$
- *وهذا ممكن* $(b+2)(c+3)=4\times4\Longrightarrow b=2\,,c=1$
- *وهذا مرفوض لأن c عدد طبيعي* $(b+2)(c+3)=8\times2\Longrightarrow b=6\,,c=-1$
- *وهذا مرفوض لأن c عدد طبيعي* $(b+2)(c+3)=16\times1\Longrightarrow b=14\,,c=-2$

إذًا $b=2\,,c=1$ ومنها نجد أن $a=5$.

(3)

ليكن العدد x. عندئذٍ:

$$\frac{120}{100}x=36\Rightarrow x=36\times\frac{100}{120}=30$$

الإجابة: 30

(4)

نسبة التخفيض تساوي

$$\frac{2890-2023}{2890}\times 100=\frac{867}{2890}\times 100=30$$

(5)

أعطت المعلمة 40% فبقي معها 60% أي:

$$60\times\frac{60}{100}=36$$

ثم أعطت صديقاتها ربع الباقي أي بقي معها ثلاثة أرباع الباقي:

$$36\times\frac{3}{4}=27$$

ثم أكلت ثلث الباقي وبالتالي يبقى معها الثلثين:

$$27\times\frac{2}{3}=18$$

إذًا الإجابة: 18

(6)

مجموع زوايا الخماسي

$$(5-2)\times 180=540^\circ$$

ومجموع أجزاء النسبة

$$2+3+4+5+6=20$$

إذًا قيمة الجزء الواحد

$$\frac{540}{20}=27^\circ$$

والزاوية الكبرى 6 أجزاء.

الإجابة: $6\times 27=162^\circ$

(7)

من المعطيات نجد أن:

$$b=\frac{105}{100}a\quad,\quad b=\frac{85}{100}c$$

$$\Longrightarrow\frac{105}{100}a=\frac{85}{100}c$$

$$\Longrightarrow\frac{a}{c}=\frac{85}{100}\times\frac{100}{105}=\frac{85}{105}=\frac{17}{21}$$

(8)

لنفرض:

الطول الأصلي L والعرض الأصلي W وبالتالي المساحة الأصلية $L \times W$

بعد الزيادة:

تكون الأبعاد الجديدة:

$$\frac{150}{100}L \quad , \quad \frac{120}{100}W$$

والمساحة الجديدة:

$$\frac{150}{100}L \times \frac{120}{100}W = \frac{180}{100}LW$$

وبالتالي نسبة الزيادة في المساحة تساوي:

$$\frac{\frac{180}{100}LW - LW}{LW} \times 100 = 80\%$$

(9)

كل يوم يباع 20% أي يتبقى 80% من السمك كل يوم وبالتالي:

بعد يوم واحد يتبقى $\frac{80}{100}$ من الكمية، وبعد يومين يتبقى $\frac{64}{100} = \frac{80}{100} \times \frac{80}{100}$ من الكمية الأصلية.

ولأن بعد يومين (أي الثلاثاء) تبقى 2000 سمكة فإن:

$$\frac{64}{100}x = 2000 \Longrightarrow x = 2000 \times \frac{100}{64} = 3125$$

(10)

من المعطيات:

$$t = \frac{u}{4} \Longrightarrow 4t = u$$

وبذلك:

$$\frac{4t}{2u} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2}$$

أي أن $4t : 2u = 1 : 2$

(11)

من المعطيات نجد:

$$\frac{x}{yz}:\frac{y}{zx}=1:k \Longrightarrow \frac{k}{1}=\frac{y}{zx}\times\frac{yz}{x}=\frac{y^2}{x^2}$$

وأيضًا:

$$yz:zx=1:2 \Longrightarrow \frac{yz}{zx}=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$k=\frac{y^2}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد:

تدريبات:

(1)

بما أن المعادلة المعطاة تحتوي على كسور مركبة في كلا الطرفين، فمن الأفضل تبسيط كل طرف على حدة أولاً.

من الطرف الأيسر:

$$1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}=1-\frac{5x-(1+3x)}{15}=\frac{15-2x+1}{15}=\frac{16-2x}{15}$$

ومن الطرف الأيمن:

$$\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}=\frac{x}{2}-\frac{14x-(10-6x)}{14}=\frac{10-13x}{14}$$

التالي نحصل على المعادلة:

$$\frac{16-2x}{15}=\frac{10-13x}{14}$$

$$\Longrightarrow 14(16-2x)=15(10-13x)$$

$$\Longrightarrow 224-28x=150-195x$$

$$\Longrightarrow x=-\frac{74}{167}$$

(2)

بنقل العدد 3 في المعادلة المعطاة إلى الطرف الأيسر، نحصل على:

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{x-a-b-c}{c}+\frac{x-a-b-c}{a}+\frac{x-a-b-c}{b}=0$$

$$\Longrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\because \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0, \therefore x-a-b-c=0$$

$$\Longrightarrow x=a+b+c$$

(3)

في المعادلة: $(x-3)^2+(x+1)^2+(4x-5)^2=0$

لدينا ثلاثة حدود غير سالبة مجموعها يساوي 0.

وحتى يكون مجموعها صفرًا، **لا بد أن يكون كل حد منها صفرًا في الوقت نفسه**. لكن هذا يتطلّب:

$$x=3, x=-1, x=\frac{5}{4}$$

معًا، وهو مستحيل. إذًا لا يوجد حل حقيقي لهذه المعادلة.

(4)

بإزالة المقام من المعادلة المعطاة نحصل على:

$$20(ax+b)-4(5x+2ab)=520ax+20b-20x-8ab=520(a-1)x=5-20b+8ab$$

(i) *عندما* $a\neq 1$:

$$x=\frac{5-20b+8ab}{20(a-1)}$$

(ii) *عندما* $a=1$ *و* $b=\frac{5}{12}$:

تصبح المعادلة

$$0\cdot x=0$$

ولذلك فإن أي عدد حقيقي هو حل لقيمة x.

(iii) *عندما* $a=1$ *و* $b\neq\frac{5}{12}$:

تصبح المعادلة

$$0\cdot x=5-12b$$

ولذلك ***لا يوجد حل لقيمة*** x.

(5)

بتحويل المعادلة المعطاة إلى الصورة

$$(2a+3b-12)x=5-3a$$

نحصل على:

$$2a+3b-12=0 \qquad and \qquad 5-3a=0$$

ومنها:

$$a=\frac{5}{3} \qquad , \qquad b=\frac{12-2a}{3}=\frac{26}{9}$$

(6)

$$2a(x+6)=4x+1$$

$$\Longrightarrow (2a-4)x=1-12a$$

وبما أن المعادلة **ليس لها حل**، فهذا يعني أن:

$$2a-4=0 \quad and \quad 1-12a\neq 0$$

$$\therefore a=2$$

(7)

$$x=\frac{12}{k}$$

وبما أن x عدد صحيح موجب، فإن k أيضًا عدد صحيح موجب، وهو أحد **عوامل العدد** 12. إذن:

$$k=1,2,3,4,6,12$$

وبالتالي فعدد قيم k الممكنة هو 6 قيم

(8)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{x+2}<\frac{13}{12}<\frac{3}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{x+2}{3}>\frac{12}{13}>\frac{x}{3}$$

$$\Longrightarrow x+2>\frac{36}{13}>x$$

$$\Longrightarrow 13(x+2)>36>13x$$

قيم x الصحيحة التي تحقق أن $13x<36$ هي 1,2

لكن $x=1$ لا تحقق $13(x+2)>36$ وبالتالي $x=2$ هي القيمة الصحيحة الموجبة الوحيدة التي تحقق المعادلة.

(9)

بما أن 4 حل للمعادلة:

$$3a - x = \frac{x}{2} + 3$$

فسنستبدل 4 بـــ x لنحصل على:

$$3a - 4 = \frac{4}{2} + 3 \Longrightarrow 3a = 9 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow (-a)^2 - 2a = 9 - 6 = 3$$

(10)

من المعادلة المعطاة نحصل على:

$$\frac{n(x-n) - m(x-m)}{mn} = \frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow (n-m)x - n^2 + m^2 = m^2$$

$$\Longrightarrow (n-m)x = n^2$$

عند $n \neq m$ فإن:

$$x = \frac{n^2}{n-m}$$

وعند $n = m$ لا يوجد حل:

نظام المعادلات الخطية الآنية:

تدريبات:

(1)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{10} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{6}$$

وهذا يعني أن النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

(2)

$$(a)\ x = 10\,, y = 3$$

$$(b)\ x = 4\,, y = 1$$

$$(c)\ x = 8\,, y = 6$$

$$(d)\ x = 5\,, y = 4$$

(3)

لتكن:

$$\begin{aligned} x + y &= 42 \\ x - y &= 8 \end{aligned}$$

بجمع المعادلتين:

$$2x = 50 \Rightarrow x = 25$$

بالتعويض في المعادلة الأولى:

$$25 + y = 42 \Rightarrow y = 17$$

العددان هما17 □ 25

(4)

نعلم أن $a = 6b$.

لتحويل المعطيات إلى معادلة، نلاحظ أنه عندما يكون الوقت b دقيقة بعد الثالثة، فإن هذا يعادل $b + 60$ دقيقة بعد الثانية.

وقيل لنا إن هذا الوقت متأخر بـ 15 دقيقة عن الوقت الذي كان فيه a دقيقة بعد الثانية.

إذن لدينا:

$$\begin{cases} a = 6b \\ a + 15 = b + 60 \end{cases}$$

ومنها نجد أن $b = 9$.

لذلك، كان الوقت **الثالثة وتسع دقائق (3:09)** عندما نظرت إلى ساعتِها للمرة الثانية.

(5)

$$\frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{4}=\frac{1}{2}\longrightarrow(1)$$
$$2(x-y)-3(x+y)+1=0\longrightarrow(2)$$

من المعادلة (1):

$$\frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{4}=\frac{1}{2}\Longrightarrow 4(x-y)-5(x+y)=10\Longrightarrow x+9y=-10\longrightarrow(3)$$

من المعادلة (2):

$$2(x-y)-3(x+y)+1=0\Longrightarrow x+5y=1\longrightarrow(4)$$

بطرح $(4)-(3)$:

$$4y=-11\Longrightarrow y=-\frac{11}{4}$$

وبالتعويض عن y في المعادلة (4):

$$x=1-5y=1+\frac{55}{4}=\frac{59}{4}$$

(6)

$$\begin{cases}5.4x+4.6y=104\longrightarrow(1)\\4.6x+5.4y=96\longrightarrow(2)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين $(2)+(1)$ سنحصل على:

$$10x+10y=200\Longrightarrow x+y=20\longrightarrow(3)$$

وبطرح المعادلتين $(2)-(1)$ سنحصل على:

$$0.8x-0.8y=8\Longrightarrow x-y=10\longrightarrow(4)$$

بجمع المعادلتين $(4)+(3)$ سنحصل على:

$$2x=30\Longrightarrow x=15$$

وبالتعويض عن x في (3) نجد أن:

$$x+y=20\Longrightarrow 15+y=20\Longrightarrow y=5$$

(7)

$$\begin{cases}x+(5x+y)=16\longrightarrow(1)\\\quad 5x+y=7\longrightarrow(2)\end{cases}$$

بالتعويض عن قيمة $5x+y$ بـ 7 في المعادلة (1) نحصل على:

$$x+2(5x+y)=16\Longrightarrow x+2(7)=16\Longrightarrow x=2$$

وبالتعويض عن x في (2) نجد أن:

$$5x+y=7\Longrightarrow 5(2)+y=7\Longrightarrow y=-3$$

(8)

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\longrightarrow(1)$$
$$x+3y+6z=15\longrightarrow(2)$$

افرض:

$$t=\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\Longrightarrow x=2t\,,y=3t\,,z=5t$$

وبالتعويض في (2):

$$x+3y+6z=15\Longrightarrow 2t+9t+30t=15\Longrightarrow t=\frac{15}{41}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$x=\frac{30}{41}\,,y=\frac{45}{41}\,,z=\frac{75}{41}$$

(9)

$$\begin{cases}x+2y=5\\ y+2z=8\\ z+2u=11\\ u+2x=6\end{cases}$$

من المعادلات المعطاة نجد أن:

$$x=5-2y\,,y=8-2z\,,z=11-2u\,,u=6-2x$$

وبالتالي:

$$x=5-2y=5-2(8-2z)=-11+4z=-11+4(11-2u)=33-8u=33-8(6-2x)$$
$$=-15+16x$$

$$\therefore x=-15+16x\Longrightarrow x=1\Longrightarrow u=4\,,z=3\,,y=2$$

(10)

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = a \longrightarrow (1) \\ 5y - z + 3x = b \longrightarrow (2) \\ 5z - x + 3y = c \longrightarrow (3) \end{cases}$$

إذا قمنا بــ $2 \times (1) + (2) - (3)$ نحصل على:

$$14x = 2a + b - c \Rightarrow x = \frac{2a + b - c}{14}$$

وعند $2 \times (2) + (3) - (1)$ نحصل على:

$$14y = 2b + c - a \Rightarrow y = \frac{2b + c - a}{14}$$

وعند $2 \times (3) + (1) - (2)$ نحصل على:

$$14z = 2c + a - b \Rightarrow z = \frac{2c + a - b}{14}$$

(11)

لأن $x = 2, \ \ y = 1$ حلول النظام فسنقوم بالتعويض عن قيمهم في النظام لنحصل على:

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \longrightarrow (1) \\ 2b + c = 5 \longrightarrow (2) \end{cases}$$

وللتخلص من b نقوم بــ $2 \times (1) - (2)$ فنحصل على:

$$4a - c = 9$$

(12)

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4ax + 5by - z = -22 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax - by + z = 8 \\ x + y + 5 = c \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى في النظام الأول نحصل على $y = 3x - 5$

بالتعويض عنها في المعادلة الأخيرة من النظام الثاني ينتج: $2x + 3(3x - 5) = -4$

وبحلها نجد أن: $x = 1 \, , y = -2$

ثم من المعادلة الثانية في النظام الأول نحصل على $z = 0$.

وبذلك، من المعادلة الثانية في النظام الثاني نجد أن $c = 4$.

وعند حل النظام:

$$4a - 10b = -22, a + 2b = 8$$

نحصل على الحل لكل من $a \, , b$:

$$a = 2, b = 3.$$

إذًا، $a = 2 \, , b = 3 \, , c = 4$

(13)

عند (a):

$$\frac{k}{6} \neq \frac{-1}{3}$$

أي أن $k \neq -2$ فإن للنظام حل وحيد وهو:

$$x = 0 \, , y = -\frac{1}{3}$$

عند (b):

$$\frac{k}{6} = -\frac{1}{3}$$

فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

(c) يستحيل أن يكون النظام بلا حلّ.

(14)

$$\begin{cases} 2020(x-y) + 2021(y-z) + 2022(z-x) = 0 \\ \\ 2020^2(x-y) + 2021^2(y-z) + 2022^2(z-x) = 2021 \end{cases}$$

افرض $u = x - y \, , v = y - z \, , w = z - x$

وبالتالي فإن $u \, , v , w$ تحقق النظام التالي:

$$\begin{cases} u + v + w = 0 \longrightarrow (1) \\ 2020u + 2021v + 2022w = 0 \longrightarrow (2) \\ 2020^2u + 2021^2v + 2022^2w = 2021 \longrightarrow (3) \end{cases}$$

الآن بـــ $(2) - (1) \times 2021$ نحصل على:

$$u - w = 0 \Longrightarrow u = w$$

وبالتعويض في (1) نجد:

$$v = -2w$$

الآن بالتعويض في (3) نحصل على:

$$(2020^2 - 2 \cdot 2021^2 + 2022^2)w = 2021$$

$$\Longrightarrow [(2022 + 2021) - (2021 + 2020)]w = 2021$$

$$\Longrightarrow 2w = 2021$$

$$\Longrightarrow z - y = -v = 2w = 2021$$

(15)

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \longrightarrow (1) \\ y - z - x = 1 \longrightarrow (2) \\ z - x - y = -15 \longrightarrow (3) \end{cases}$$

بجمع $(3) + (2) + (1)$ *نحصل على:*

$$x + y + z = 9 \longrightarrow (4)$$

الآن بجمع $(3) + (2)$ *نحصل على:*

$$-2x = -14 \Longrightarrow x = 7$$

وبجمع $(4) + (2)$ *نحصل على:*

$$2y = 10 \Longrightarrow y = 5$$

وبجمع $(4) + (3)$ *نحصل على:*

$$2z = -6 \Longrightarrow z = -3$$

(16)

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \longrightarrow (1) \\ y - z + u = 2 \longrightarrow (2) \\ z - u + v = 3 \longrightarrow (3) \\ u - v + x = 4 \longrightarrow (4) \\ v - x + y = 5 \longrightarrow (5) \end{cases}$$

بجمع المعادلات نحصل على:

$$x + y + z + u + v = 15 \longrightarrow (6)$$

الآن بجمع $(1) + (5)$, $(5) + (4)$, $(4) + (3)$, $(3) + (2)$, $(2) + (1)$ *نحصل على:*

$$\begin{cases} x + u = 3 \\ y + v = 5 \\ z + x = 7 \\ u + y = 9 \\ v + z = 6 \end{cases}$$

وبالتعويض بمجموع الأزواج التي حصلنا عليها في (6) نحصل على:

$$x = 0, y = 6, z = 7, u = 3, v = -1$$

أسئلة التحدي:

(1)

بجمع المعادلتين نحصل على:

$$\frac{2}{a} = 20 \Longrightarrow \frac{1}{a} = 10 \Longrightarrow a = \frac{1}{10}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على:

$$10 + \frac{1}{b} = 14 \Longrightarrow \frac{1}{b} = 4 \Longrightarrow b = \frac{1}{4}$$

(2)

بجمع المعادلات الثلاثة نحصل على $2(x+y+z) = 18$ ومنها $x+y+z=9$، بالتعويض من المعادلة الأولى نحصل على $z=1$ ثم من الثانية $x=5$ ومن الثالثة $y=3$.

(3)

مثلاً $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$، يمكن إيجاد الصيغة العامة كالتالي:

بفرض الكسرين $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ فيكون لدينا $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$، ومنها $\frac{1}{ab} = \frac{b-a}{ab}$ ومنها $b-a=1$ ومنها $b=a+1$، ويكون الكسرين بشكل عام $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a}$.

(4)

بفرض عرض وطول المستطيل المظلل هو x و $3y$ على التوالي وطول المستطيل غير المظلل يكون l.

بما أن كل مستطيل له نفس المحيط إذن $2(l+y) = 2(x+3y)$ وبالتالي $l+y = x+3y$

ومنها $l = x+2y$، ولأن الشكل الأصلي مربع إذن $2x+l=3y$ ومنها $l = 3y-2x$.

وبالتالي $x+2y = 3y-2x$ ومن ثم $y=3x$.

إذن مساحة مستطيل مظلل هي $3xy$،

ومساحة مستطيل غير مظلل هي $ly = y(x+2y) = y(x+6x) = 7xy$

فإن نسبة مساحة مستطيل مظلل إلى مساحة مستطيل غير مظلل هي $3xy : 7xy = 3:7$.

(5)

بفرض عدد الأطفال هو n، قيمة المبلغ هي k هلله.

لدينا $60n = k - 210$ ومنها $k = 60n + 210$.

من جهة أخرى $\frac{k+20}{n} = 70$ ومنها $k = 70n - 20$.

أصبح الآن $60n + 210 = 70n - 20$ ومنها $n = 23$ وهو عدد الأطفال.

(6)

يمكننا كتابة التحليل الأولي للعدد 3600 كالتالي: $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ والمطلوب كتابته على الصورة: $2^a \times 3^b \times 4^c \times 5^d$. بمقارنة المقدارين نجد $b = 2, d = 2$ وأيضاً $2^4 = 2^a \times 4^c$.
ولأن $4^c = 2^{2c}$ ، وبالتالي $a + 2c = 4$ ومنها $a = 4 - 2c$. ولكن $a + b + c + d = 7$.
ومن ثم $4 - 2c + 2 + c + 2 = 7$ والتي حلها $c = 1$.

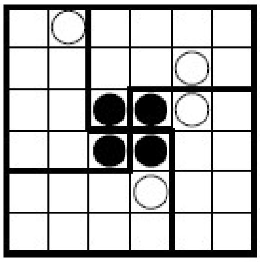
(7)

نريد أن يكون أكبر عدد من الرقم 5 على اليسار. سنبدأ بإزالة 1234 ونترك 5. ثم نعيد الكرة نزيل 1234 ونترك 5. للأسف لا نستطيع جعل 5 أخرى في اليسار. مسموح لنا فقط أن نزيل 12 التالية. وبالتالي أكبر عدد يمكن الحصول عليه هو:

553451234512345.

(8)

على سبيل المثال الشكل أدناه:



(9)

الطفل الوحيد المحتمل أن يكون في رياض الأطفال هو الذي عمره 5 سنوات، ولأن إحدى البنات في رياض الأطفال فإن الطفل الأصغر هو بنت. كما أن محمداً ليس الأصغر، ولأنه أصغر من نجاح فإنه ليس الأكبر كذلك. ومن ثم عمر محمد 8 أو 13.

- بفرض عمر محمد 8 سنوات فإن عمر رجاء 13 أو 15، وتصبح الأزواج المرتبة الممكنة لتمثيل عمري نور ورجاء هي:

$$(5,13), (5,15), (13,15)$$

الزوج الوحيد الذي يحقق أن مجموع العمرين يقبل القسمة على 3 هو أن يكون عمر نور 5 سنوات وعمر رجاء 13.

- بفرض عمر محمد 13 سنة فإن عمر رجاء 15 ، وتصبح الأزواج المرتبة الممكنة لتمثيل عمري نور ورجاء هي:

$$(5,15), (8,15)$$

ولا يوجد إمكانية أن يكون مجموع العمرين يقبل القسمة على ثلاثة.

الخلاصة شروط السؤال تتحقق فقط عندما عمر نور 5 سنوات، وبالتالي نور بنت.

(10)

إذا قال كل الناس في الجزيرة الصدق فسنحصل على 100 إجابة إيجابية. يعطي كل كاذب ثلاث إجابات إيجابية بدلاً من إجابة واحدة ، وبهذه الطريقة يزيد إجمالي عدد الإجابات الإيجابية بمقدار 2.

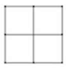
حيث تم إعطاء $25 + 25 + 45 + 55 = 150$ إجابات إيجابية، 50 منها "إضافية" .

لهذا السبب عدد الكذابين هو $50 \div 2 = 25$.

(11)

السؤال ليس سهلاً على أية حال والهدف هو أن نطلق العنان لإبداع الطالب.

لو نظرنا لأي مربع من النوع 2×2 والمقسم لــ 4 مربعات صغيرة داخل الجدول.



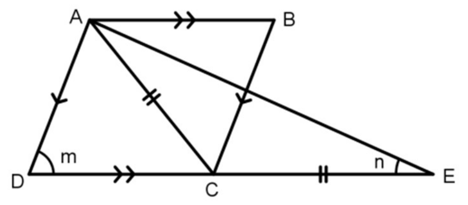
دعنا نطلق عليه "بلوك" سنجد أن أي مربعين صغيرين فيه سيشتركان في رأس أو ضلع. وبالتالي لا يمكن أن نلون أكثر من مربع صغير بالأسود داخل أي بلوك في الجدول. ونطرح السؤال الآن كم أكبر عدد من البلوك المنفصل (أي غير المتداخل) التي يمكن أن نقسم لها الجدول المعطى؟ الإجابة هي 16 بلوك!

ومن ثم أكبر عدد من المربعات الصغيرة يمكن تلوينها بالأسود بشروط السؤال هو 16، ولا يمكننا تلوين 17 مربع صغير بهذه الطريقة.

حلول (الهندسة)

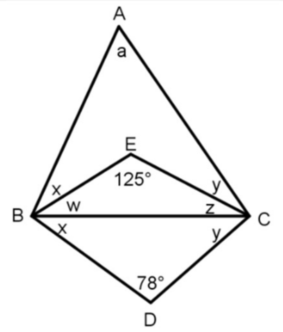
حلول تدريبات المراجعة:

(1)



$$\begin{aligned}&CA = CE \Longrightarrow \angle EAC = \angle AEC = n\\&\Longrightarrow \angle ACD = n + n = 2n\\&AD = CD \Longrightarrow \angle DAC = \angle DCA = 2n\\&\angle D + \angle DAC + \angle DCA = 180 \Longrightarrow 4n + m = 180\end{aligned}$$

(2)

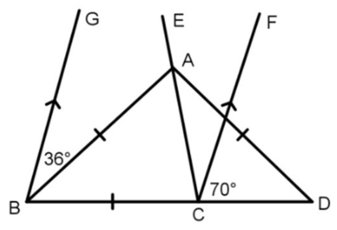


$$x + y = 180 - 78 = 102$$

$$w + z = 180 - 125 = 55$$

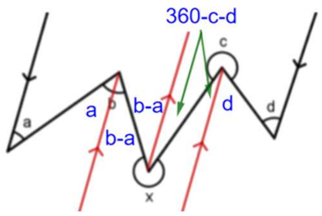
$$A = 180 - (x + y + w + z) = 180 - (102 + 55) = 23°$$

(3)



$$\begin{aligned}&\angle DCF = \angle CBG = 70 \Longrightarrow \angle ABC = 70 - 36 = 34°\\&\Longrightarrow \angle ADC = \angle ABC = 34,\\&\angle BAC = \angle BCA = \frac{180 - 34}{2} = 73°\\&\angle BAD = 180 - (34 + 34) = 112°\\&\Longrightarrow \angle DAC = 112 - 73 = 39\\&\Longrightarrow \angle EAD = 180 - 39 = 141°\end{aligned}$$

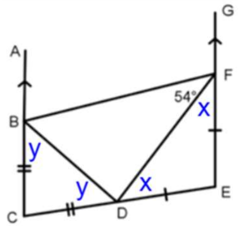
(4)



$$x + b - a + 360 - c - d = 360$$

$$\Longrightarrow x = c + d + a - b$$

(5)



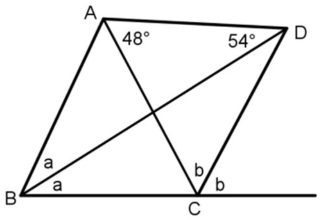
$2x + \angle FED = 180$

$2y + \angle BCD = 180$

$\angle FED + \angle BCD = 180 \Longrightarrow 2x + 2y = 180 \Longrightarrow x + y = 90$

$\Longrightarrow \angle BDF = 180 - (x + y) = 90$

(6)



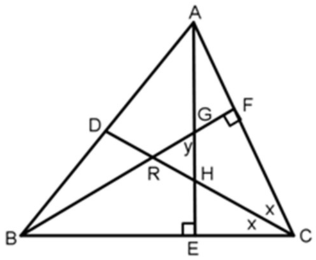
$\angle BAC = 2b - 2a$

$\angle BDC = b - a$

$2b = a + 78 \;\;,\;\; a = \dfrac{2}{3}b \Longrightarrow 2b = \dfrac{2}{3}b + 78$

$\Longrightarrow b = 58.5° \;, a = 39°$

(7)



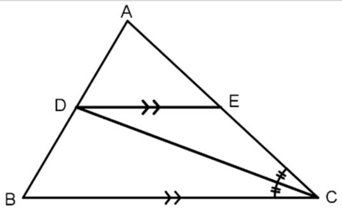
$\angle FRC = 90 - x,$

$\angle GHR = \angle EHC = 90 - x$

$\Delta GHR: y + (90 - x) + (90 - x) = 180$

$\Longrightarrow y = 2x$

(8)

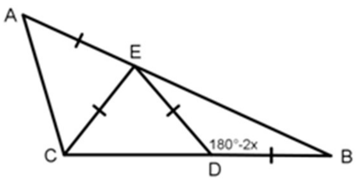


$\angle ADE = \angle B = 70°,$

$\angle EDC = \angle BCD = \dfrac{40}{2} = 20°$

$\Longrightarrow \angle BDC = 180 - (70 + 20) = 90°$

(9)



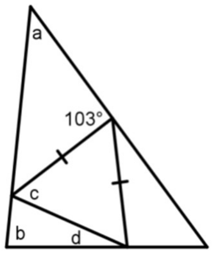
$\angle DBE = \angle DEB = x$

$\angle DCE = \angle CDE = 2x$

$\angle AEC = \angle DCE + \angle DBE = 3x$

$\angle ACE = \angle CAE = \dfrac{180 - 3x}{2}$

(10)



$$\frac{3}{2}a = c \quad , \qquad 2a = b \quad , \qquad \frac{1}{3}a = d$$

$$77 - a + c = b + d \Longrightarrow 77 - a + \frac{3}{2}a = 2a + \frac{1}{3}a$$

$$\Longrightarrow 77 \times 6 - 6a + 9a = 12a + 2a$$

$$\Longrightarrow 77 \times 6 = 11a \ \Longrightarrow a = 42°$$

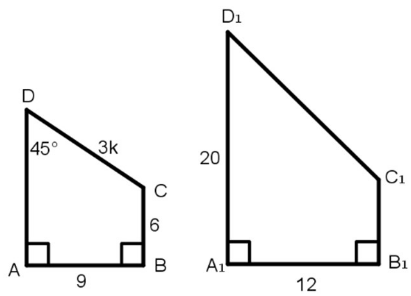
$$b = \frac{42}{2} = 21 \ , \ c = \frac{3\times 42}{2} = 63 \ , \ d = \frac{42}{3} = 14$$

حلول تدريبات التشابه:

$(1-8)$

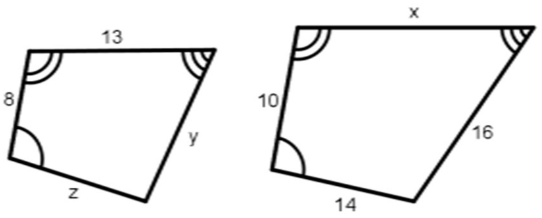
	المضلعان	دائما متشابهان	أحيانا متشابهان	التشابه مستحيل
(1)	مثلثان متطابقا الأضلاع	√		
(2)	مثلثان متطابقا الضلعين.		√	
(3)	مربعان.	√		
(4)	معينان.		√	
(5)	مثلثان قائما الزاوية.		√	
(6)	مثلثان مختلفا الأضلاع.		√	
(7)	مستطيلان.		√	
(8)	مثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا.			√

$(9-16)$



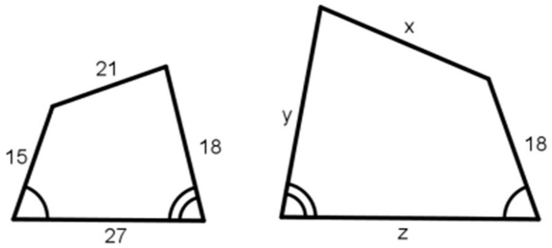
(9)	*نسبة التشابه بين* $ABCD$ ،$A_1B_1C_1D_1$	$\frac{3}{4}$
(10)	*ما هو نوع الرباعي* A_1, B_1, C_1, D_1؟	*شبه منحرف*
(11)	$m\angle D_1$ *يساوي*	$45°$
(12)	$m\angle C_1$ *يساوي.*	$180-45=135°$
(13)	C_1B_1 *يساوي.*	$\frac{12}{9}=\frac{C_1B_1}{6} \Longrightarrow C_1B_1=8$
(14)	*أوجد* AD *يساوي.*	$\frac{12}{9}=\frac{20}{AD} \Longrightarrow AD=15$
(15)	C_1D_1 *يساوي.*	$\frac{12}{9}=\frac{C_1D_1}{3k} \Longrightarrow C_1D_1=4k$
(16)	*النسبة بين محيط المضلعين يساوي.*	$\frac{3}{4}$

(17)



$$\frac{10}{8} = \frac{x}{13} \Longrightarrow x = \frac{65}{4}$$
$$\frac{10}{8} = \frac{16}{y} \Longrightarrow y = \frac{64}{5}$$
$$\frac{10}{8} = \frac{14}{z} \Longrightarrow z = \frac{56}{5}$$

(18)



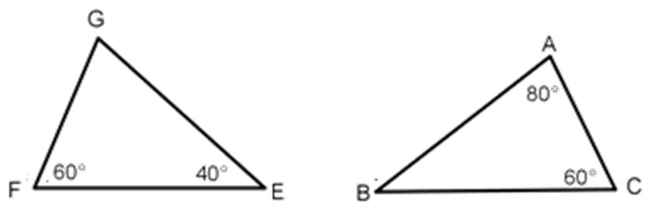
$$\frac{18}{15} = \frac{y}{18} \Longrightarrow y = \frac{108}{5}$$
$$\frac{18}{15} = \frac{z}{27} \Longrightarrow y = \frac{162}{5}$$
$$\frac{18}{15} = \frac{x}{21} \Longrightarrow x = \frac{126}{5}$$

حلول تدريبات تشابه المثلثات:

$(1-9)$

رقم التدريب	التشابه
1	متشابهان
2	غير متشابهين
3	متشابهان
4	متشابهان
5	متشابهان
6	لا يمكن الاستنتاج
7	متشابهان
8	متشابهان
9	متشابهان

(10)

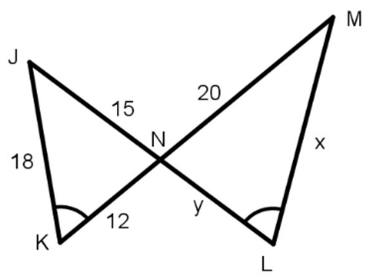


$\angle ABC = 40°$

$\Delta ABC \sim \Delta GEF$

$$\frac{AB}{GE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{GF}$$

(11)

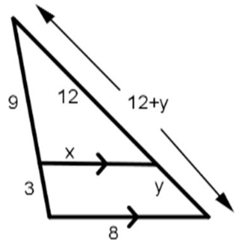


$\Delta JKN \sim \Delta MLN$

$$\frac{15}{20} = \frac{12}{y} \Longrightarrow y = 16$$

$$\frac{15}{20} = \frac{18}{x} \Longrightarrow x = 24$$

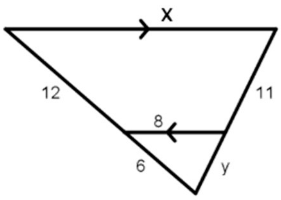
(12)



$$\frac{9}{12}=\frac{12}{12+y}\Longrightarrow y=4$$

$$\frac{9}{12}=\frac{x}{8}\Longrightarrow x=6$$

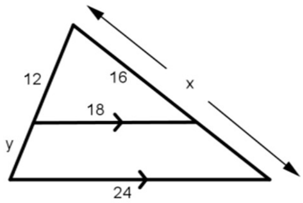
(13)



$$\frac{6}{18}=\frac{y}{11+y}\Longrightarrow y=\frac{11}{2}$$

$$\frac{6}{18}=\frac{8}{x}\Longrightarrow x=24$$

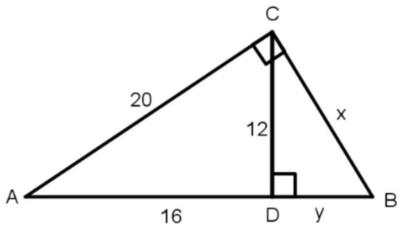
(14)



$$\frac{18}{24}=\frac{12}{12+y}\Longrightarrow y=4$$

$$\frac{18}{24}=\frac{16}{x}\Longrightarrow x=\frac{64}{3}$$

(15)

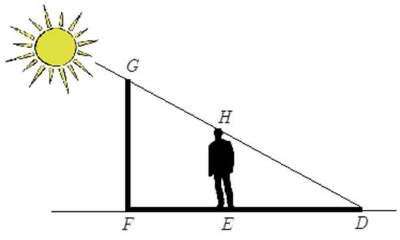


$a)\ \ \Delta ABC\sim\Delta ACD\sim\Delta CBD$

$b)\ \frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AC}\Longrightarrow\frac{y}{12}=\frac{12}{16}=\frac{x}{20}$

$\Longrightarrow x=15\ ,\qquad y=9$

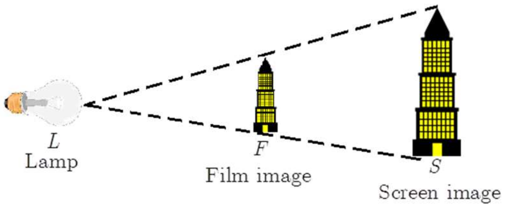
(16)



$\Delta HDE \sim GDF$

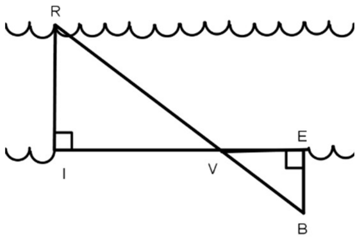
$$\frac{HE}{GF} = \frac{DE}{FD} \Longrightarrow \frac{2}{GF} = \frac{1.6}{4.4} \Longrightarrow GF = 5.5m$$

(17)



$$\frac{6\ cm}{24\ m} = \frac{x\ cm}{2.2\ m} \Longrightarrow x = 0.55\ cm$$

(18)



$\Delta VEB \sim \Delta VIR$

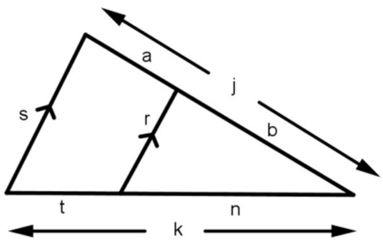
$$\Longrightarrow \frac{20}{63} = \frac{15}{IR} \Longrightarrow IR = 47.25\ m$$

(19 – 24)

التدريب	عبارة التشابه	النظرية
(19)	$\Delta ABC \sim \Delta GNK$	SAS
(20)	$\Delta ABC \sim \Delta ARS$	SAS
(21)	$\Delta ABC \sim \Delta THJ$	AA
(22)	$\Delta ABC \sim \Delta MBL$	SAS
(23)	$\Delta ABC \sim \Delta XRN$	SSS
(24)	$\Delta ABC \sim \Delta AEF$	AA

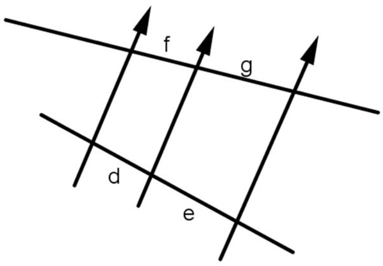
حلول تدريبات الأطوال المتناسبة:

(1)



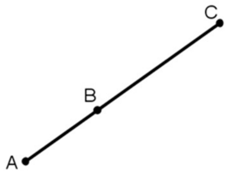
الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{r}{s}=\frac{a}{b}$	X
(b)	$\frac{t}{k}=\frac{a}{j}$	√
(c)	$\frac{j}{a}=\frac{s}{r}$	√
(d)	$\frac{r}{s}=\frac{n}{k}$	√
(e)	$\frac{a}{b}=\frac{n}{t}$	X
(f)	$\frac{b}{j}=\frac{t}{k}$	X

(2)



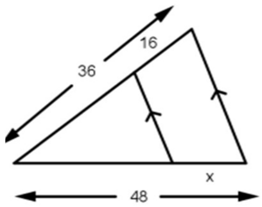
الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{d}{f}=\frac{g}{e}$	X
b	$\frac{f}{g}=\frac{e}{d}$	X
(c)	$\frac{g}{f}=\frac{e}{d}$	√
(d)	$\frac{d}{f}=\frac{e}{g}$	√

(3 – 6)



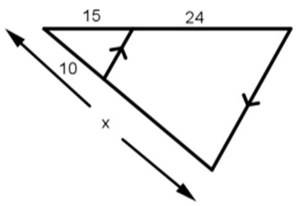
	(3)	(4)	(5)	(6)
AB	6	15	21	37.5
BC	10	25	35	62.5
AC	16	40	56	100

(7)



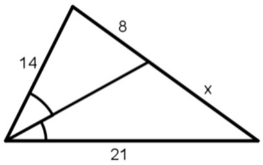
$$\frac{x}{48}=\frac{16}{36}\Longrightarrow x=\frac{64}{3}$$

(8)



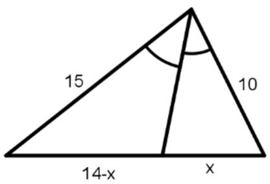
$$\frac{10}{x}=\frac{15}{39}\Longrightarrow x=26$$

(9)



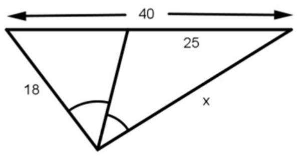
$$\frac{14}{21}=\frac{8}{x}\Longrightarrow x=12$$

(10)



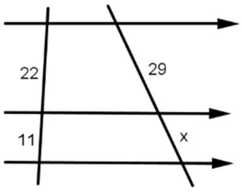
$$\frac{15}{10}=\frac{14-x}{x}\Longrightarrow x=\frac{28}{5}$$

(11)



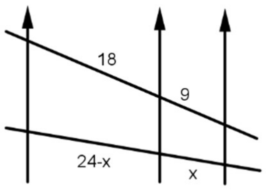
$$\frac{15}{25} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 30$$

(12)



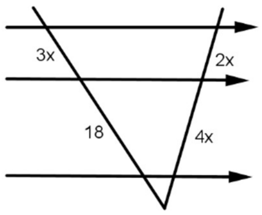
$$\frac{22}{11} = \frac{29}{x} \Rightarrow x = 14.5$$

(13)



$$\frac{9}{18} = \frac{x}{24 - x} \Rightarrow x = 8$$

(14)



$$\frac{18}{3x} = \frac{4x}{2x} \Rightarrow x = 3$$

حلول (نظرية الاعداد)

الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية:

تدريبات:

(1)

العدد المكون من رقمي الآحاد والعشرات هو 38. ولأن القسمة من اليسار لليمين فإن عند قسمة 3 على 2 وهو عدد فردي (فعليًا تكون 13 على 2 لوجود حمل 1 من قسمة العدد الفردي السابق لها) فإن الباقي 1. ومن ثم ينتج رقم الآحاد من قسمة 18 على 2 وهو 9. وأخيراً العدد الناتج فردي.

(2)

لا يمكننا، فمجموع 5 أعداد فردية هو عدد فردي لا يمكن أن يساوي 50 لأنه زوجي.

(3)

لأن a, b عددان صحيحان متتاليان، فأحدهما زوجي والآخر فردي، وبالتالي c عدد زوجي. الآن الأعداد a, b, c منها اثنان زوجيان وواحد فردي. ولأن العدد ومربعه لهما نفس الزوجية فإن الأعداد a^2, b^2, c^2 أيضاً منها اثنان زوجيان وواحد فردي. ولأن N^2 مجموع تلك الأعداد فيجب أن يكون فردياً.

(4)

بدأ النمط ب 1,2، وهما فردي وزوجي، الحد الثالث ينتج من طرح الأول من ثلاثة أمثال الثاني، ولأن عند ضرب عدد في 3 فلا يتغير نوعه، فإن العدد الثالث سيكون ناتج طرح فردي من زوجي وبالتالي سيكون فردياً، بالمثل العدد الرابع سيكون فردياً، أما الخامس سيكون ناتج طرح فردي من فردي وبالتالي سيكون زوجيًا، والسادس فردياً، وكما موضح $(\underline{O\ \ E\ \ O}\ \ \underline{O\ \ E\ \ O}\ \ldots.)$ يبدأ النمط في التكرار، الثلاثة حدود الأولى تعيد نفسها وهكذا.

الآن نقسم 2003 على 3 فيكون خارج القسمة 667 عدداً (كل ثلاثة منهم على الصورة $\underline{O\ \ E\ \ O}$ تواليا)

والباقي 2، عددان على الصورة $\underline{O\ \ E\ \ }$، وأخيراً العدد 2003 عدد زوجي.

(5)

ليكن $k = (x+1)(y+2)(z+3)$. لدينا الحالات الثلاث:

الأولى: x, y فرديان، عندها $x+1$ زوجي، وبالتالي k زوجي.

الثانية: x, z فرديان، عندها $x+1, z+3$ زوجيان، وبالتالي k زوجي.

الثالثة: y, z فرديان، عندها $z+3$ زوجي، وبالتالي k زوجي.

(6)

واضح أن عدد الأعداد الفردية فردي (تحديداً 1009 عدداً). فلو جمعنا كل الأعداد سيكون الناتج فردياً. ولأن ناتج جمع العددين أو طرحهما له نفس الزوجية فلو إستبدلنا أي عدد من علامات "+" بعلامات "-" فإن ذلك لن يغير من زوجية الناتج، وبالتالي الناتج فردي.

(7)

(a) نعم. مثلاً $1+2-3+4+5+6-7-8$

(b) لا.

يجب ملاحظة أن مجموع الأعداد هو $1+2+3+\ldots+9=45$ عدد فردي. بينما لو افترضنا أنه أمكن استبدال النجوم بعلامات $-,+$، لأمكننا نقل الأعداد التي أمامها علامة $-$ للطرف الأيمن لنحصل على مجموعتين كل مهما نصف مجموع المجموع الأصلي، وبالتالي مجموع الأعداد الأصلي زوجي، وذلك يناقض كونه 45.

(8)

غير ممكن.

بفرض عدد مباريات المكسب للاعب x ، والتعادل y ، والخسارة $20-x-y$ ، وبالتالي فإن مجموع نقاطه هو

$3x+y-(20-x-y)=2x+2y-20$ وهو عدد زوجي لا يمكن أن يساوي 39.

(9)

(a) نعم ممكن. مثلاً نضع في السلات بالتتابع برتقالة ثم 2 ثم برتقالة ثم 2 وهكذا.

(b) لا.

بالنظر لعدد البرتقال في كل سلتين متجاورتين يجب أن يكونا مختلفين في الزوجية، مثلاً إذا كانت السلة الأولى بها عدد زوجي فإن في الثانية بها عدد فردي والثالثة زوجي وهكذا. ولكننا في الأخير سنصل لتناقض سيكون في الأولى والتاسعة عدد زوجي على خلاف المطلوب.

(10)

(a) لا.

فهي تستطيع فقط أن تقفز عدد صحيح من السنتيمترات.

(b) لا.

فهي تستطيع فقط أن تقفز عدد زوجي من السنتيمترات، ومن ثم بعدها عن نقطة الأصل دائماً عدد زوجي.

(c) نعم.

فهي تستطيع مثلاً أن تقفز 6 سم مرتين لليمين ثم تقفز 8 لليسار.

(11)

هذا السؤال ليس سهلاً. فبعد تجربة الطلاب لعدد مختلف من وضع الأعداد سيتسرب اليأس لنفوسهم من إمكانية ترتيب الأعداد بهذه الشروط، وربما يصرح بعضهم بأن هذا غير ممكن. ولكن كيف السبيل لإثبات ذلك؟

أحد الطرق أن ننظر إلى رتب الأعداد على الخط أي العدد الأول ثم الثاني وهكذا إلى العاشر أي $1,2,3,\ldots,10$، وبالتالي مجموع رتب الأعداد هو 45 وهو عدد فردي، من جهة أخرى ومن شروط السؤال يجب أن يكون:

مجموع رتبتي العددين 1,1 هو $a+(a+2)=2a+2$ عدد زوجي (أياً كان ترتيبهم على الصف)،

مجموع رتبتي العددين 2,2 هو $b+(b+3)=2b+3$ عدد فردي،

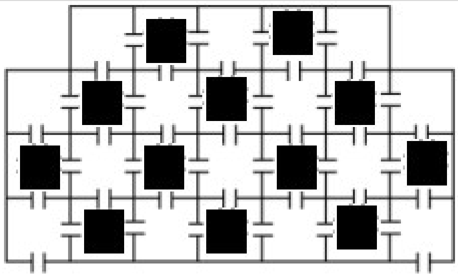
مجموع رتبتي العددين 3,3 هو $c+(c+4)=2c+4$ عدد زوجي،

مجموع رتبتي العددين 4,4 هو $d+(d+5)=2d+5$ عدد فردي،

مجموع رتبتي العددين 5,5 هو $e+(e+6)=2e+6$ عدد زوجي،

وبالتالي مجموع رتب الأعداد بشرط السؤال هو مجموع خمسة أعداد منها اثنان فرديان وثلاثة زوجية وبالتالي يجب أن يكون مجموع الرتب زوجيًا، وهذا يناقض كون مجموع رتب الأعداد 45 فردياً. ومن ثم الحالة مستحيلة.

(12)



هذا السؤال يشبه السابق. فبعد عدة محاولات ربما يبدأ الطلاب في التفكير في الاستحالة. وسنستخدم إستراتيجية التلوين. وهي بقدر بساطتها بقدر قوتها في هذه الحالات. وسيدرسها الطلاب بقدر أوسع في التركيبات. عدد الغرف التي يجب زيارتها 26 وهو عدد زوجي. دعنا نلون الغرف كما في الرسم أعلاه كلوحة الشطرنج بمعنى كل مربعين متجاورين مختلفين في اللون ما بين أبيض وأسود. الآن شرط السؤال يحتم علينا أن نبدأ من غرفة بيضاء وننتهي في غرفة بيضاء أيضًا. ولأن كل غرفة يجب أن نزورها مرة واحدة فقط ولا يوجد غرفتان متجاورتان لهما نفس اللون يجب أن تكون سلسلة حركاتنا كالتالي أبيض ثم أسود ثم أبيض ثم أسود وبالتتابع حتى نصل لأبيض. ومن ثم عدد الأبيض يزيد عن الأسود بواحد، وبالتالي يجب أن يكون أحدهما فردي والآخر زوجي، وبالتالي طول مثل هذه السلسلة (هو نفسه عدد الغرف) يجب أن يكون فردياً. وهذا يناقض أن عدد الغرف 26 زوجي. وبالتالي المهمة مستحيلة.

الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة:

تدريبات:

(1)

الإجابة (B).

x, y مجموعهما فردي، وبالتالي أحدهما فردي والآخر زوجي. ولأن 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي فإن أحدهما 2، والآخر 73 أولي أيضاً. وبالتالي الحلول هي $(2,73),(73,2)$.

(2)

نستبعد الأعداد الأولية المكونة من خانتين وأحد رقميها 2,4,5,6,8، ونبحث فقط في الأعداد المكونة من خانتين وأرقامها هي 1,3,7,9 (لاحظ لا يوجد عدد أولي مكون من خانتين وأحد خاناته 0)، وبالتجريب نجد الأعداد الأولية المشاغبة هي: 11,13,17,31,37,71,73,79,97 وعددها 9 أعداد.

(3)

لدينا $a(b^b c+1)=2000=2^4.5^3$، وبالتالي $a=5$ أو $a=2$.

عندما $a=5$ نجد $b^b c+1=400$ وبالتالي $b^b c=399=3.7.19$ وهي غير قابلة للحل.

عندما $a=2$ نجد $b^b c+1=1000$ وبالتالي $b^b c=999=3^3.37$، وحلها الوحيد $b=3, c=37$.

وأخيرًا القيمة الوحيدة الممكنة هي $a+b+c=2+3+37=42$.

(4)

لأن $p+q$ عدد زوجي فهناك إمكانيتان:

الأولى: p, q كلاهما زوجي وبالتالي $p=q=2$، ومنها $p-q=0$ وهذا يناقض كون $p-q$ أوليًا.

الثانية: p, q كلاهما فردي وبالتالي $p-q$ عدد زوجي أولي، ومنها $p-q=2$، ومن ثم $p=q+2$ وبالتالي

$$(1+\frac{1}{2})^p(1-\frac{1}{3})^q=(\frac{3}{2})^{q+2}.(\frac{2}{3})^q=(\frac{3}{2})^{q+2}.(\frac{3}{2})^{-q}=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$$

(5)

أي عدد صحيح موجب يمكن كتابته على واحدة من الصور الثلاث $3k, 3m+1, 3m+2$ حيث $k\geq 1, m\geq 0$ عددان صحيحان .

عندما n على الصورة $3k$ فإن $n+3=3k+3=3(k+1)$ عدد مؤلف (مضاعف لـ3 أكبر منها).

عندما n على الصورة $3m+2$ فإن $n+7=3k+9=3(k+3)$ عدد مؤلف (مضاعف لـ3 أكبر منها).

عندما n على الصورة $3m+1$ فإن $n+3=3k+4, n+7=3k+8$ يحتمل أن يكونا أوليين،

بالفعل $n=4$ تجعل $n+3=7, n+7=11$ أوليين.

وأخيراً باقي قسمة n على 3 هو 1.

(6)

عندما $p \geq 5$ فإنه يمكن كتابته على الصورة $6k \pm 1$ (حيث $k \geq 1$ عدد صحيح).

الآن $p = 6k + 1$ فإن $2p + 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$ ليس أوليًا، فهو مضاعف للعدد 3 أكبر من 3.

بينما $p = 6k - 1$ فإن $2p + 1 = 12k - 1$ ربما يكون أولياً،

ويكون $4p + 1 = 24k - 3 = 3(8k - 1)$ عددًا مؤلفًا (فهو مضاعف للعدد 3 أكبر من 3.)

(7)

لأن

$$\frac{a}{b} = \frac{65}{56}$$

فيمكننا أن نفرض $a = 65t, b = 56t$ حيث t عدد طبيعي، وبالتالي:

$a + b = 121t$ عدد مؤلف.

(8)

نعيد كتابة المعادلة المعطاة على الصورة: $(m - n)(m + n) - 2(m + n) = 19$ ومنها

$(m + n)(m - n - 2) = 19$، ولأن $(m + n) > (m - n - 2)$ فإن $m + n = 19, m - n - 2 = 1$ وحل

النظام هو $m = 11, n = 8$.

(9)

العددان 1661,1986 أوليان نسبياً، $1986 = 2 \times 3 \times 331$ (تحليله لأعداد أولية). وبملاحظة أن

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{331} = \frac{1661}{1986}$$

نجد $p + q + r = 2 + 3 + 331 = 336$.

(10)

عندما $p = m + n + mn$ قيمة صغرى فإن m, n أصغر ما يمكن، وبالتالي أحدهما 2 والآخر 3 لتماثل وجودهما في قيمة p. ومن ثم $p = 2 + 3 + 2 \times 3 = 11$. وبالتالي

$$\frac{m^2 + n^2}{p^2} = \frac{2^2 + 3^2}{11^2} = \frac{13}{121}$$

(11)

لأن $q = mn$ عدد أولي فإن أحد العددين m, n يساوي واحد والآخر يساوي q (غير ذلك يكون q مؤلفًا). ويصبح $p = q + 1$. ومن ثم p, q عددان أوليان متتاليان. ولا يوجد عددان أوليان متتاليان غير 2 و3. وبالتالي $q = 2, p = 3$ وأيضاً m, n أحدهما يساوي 1 والآخر 2. وأخيرًا

$$\frac{p^p + q^q}{m^n + n^m} = \frac{3^2 + 2^3}{1^2 + 2^1} = \frac{13}{3}$$

(12)

129 مجموع عددين طبيعيين فلابد أن يكون أحدهما زوجي والآخر فردي، وذلك يتطلب أن يكون p, q أحدهما زوجي، وبالتالي p, q أحدهما 2 (لأنه لا يوجد عدد أولي زوجي غير الـ 2).

عند $p = 2$ نجد $q = 17$ وعندها $p + q = 19$.

وعند $q = 2$ فإن $p = 23$ وعندها $p + q = 25$.

وأخيراً $(p + q) \in \{19,25\}$.

(13)

واضح أن $p = 2,3$ لا يحقق.

بينما $p = 5$ تجعل الأعداد المعطاة على الترتيب 5,7,11,13,19 كلها أولية،

إذا افترضنا أن $p > 5$ فسيكون علىأحد الصور الخمس التالية:

عندما $p = 5k, k > 1$ فإن p ليس أوليًا (لا يحقق).

عندما $p = 5k + 1, k \geq 1$ فإن $p + 14 = 5k + 15$ ليس أوليًا (لا يحقق).

عندما $p = 5k + 2, k \geq 1$ فإن $p + 8 = 5k + 10$ ليس أوليًا (لا يحقق).

عندما $p = 5k + 3, k \geq 1$ فإن $p + 2 = 5k + 5$ ليس أوليًا (لا يحقق).

عندما $p = 5k + 4, k \geq 1$ فإن $p + 6 = 5k + 10$ ليس أوليًا (لا يحقق).

الحل الوحيد $p = 5$.

(14)

لا يوجد عددان أوليان متتاليان غير 2و 3سيكون أحدهما p والآخر q. لدينا المجموع

$$(n-1)+(3n-19)+(38-5n)+(7n-45)=6n-27$$

ولأن p,q أحدهما 2 والآخر 3 يكون المجموع $p+q+2p+2q=15$ (لاحظ تماثل وضع p,q في المجموع مما يجعل ناتج الجمع ثابت سواءًا $p=2,q=3$ أو العكس)، وعندها $6n-27=15$ ومنها $n=7$ وعلينا التحقق.

(15)

ليكن $M=n^2+n+41$، وباختيار $n=41k$ حيث k عدد صحيح أكبر من أو يساوي 1 نجد $M=(41k)^2+41k+41=41(41k^2+k+1)$ عدداً مؤلفًا.

ولأن قيم k غير منتهية، وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من القيم الصحيحة الموجبة للعدد n تجعل العدد M مؤلفًا.

حلول (التركيبات)

مبدأي العد الأساسيين:

(2)

$$6 \times 7 = 42$$

(1)

$$2 \times 3 = 6$$

(4)

$1,5,2,4 \;-\; 1,4,2,5 \;-\; 1,3,5,2$

3 مسارات تبدأ بـ 1

$2,5,1,4 \;-\; 2,5,1,3 \;-\; 2,4,1,5 \;-\; 2,4,1,3 \;-\; 2,5,3,1$

5 مسارات تبدأ بـ 2

$3,5,2,4 \;-\; 3,5,1,4 \;-\; 3,1,5,2 \;-\; 3,1,4,2$

4 مسارات تبدأ بـ 3

$4,2,5,1 \;-\; 4,1,5,2 \;-\; 4,1,5,3 \;-\; 4,1,3,5 \;-\; 4,2,5,3$

5 مسارات تبدأ بـ 4

$5,3,1,4 \;-\; 5,2,4,1 \;-\; 5,1,4,2$

3 مسارات تبدأ بـ5

المجموع: 3 + 5 + 4 + 5 + 3 = 20

(3)

بدون تعادل ابدا او مع تعادل اثنين منهم بالضبط (التعادل في المركز الاول او الثاني) او تعادل الثلاثة:

$$6 + 6 + 1 = 13$$

(5)

نرتب المجموعات الثلاث بست طرق × ترتيب كتب الرياضيات (3×2×1 = 6 طرق) × الكيمياء (4×3×2×1) × الفيزياء (5×4×3×2×1).

إذن العدد الكلي = 3×2×1 × 6 × 24 × 120 = 103,680 طريقة.

عدد الأعداد والأشرطة:

(6)

$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

(7)

$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5 = 45000$

(8)

$(4 \times 4) + (3 \times 4) = 16 + 12 = 28$

(9)

$3 \times 9 \times 9 = 243$

(10)

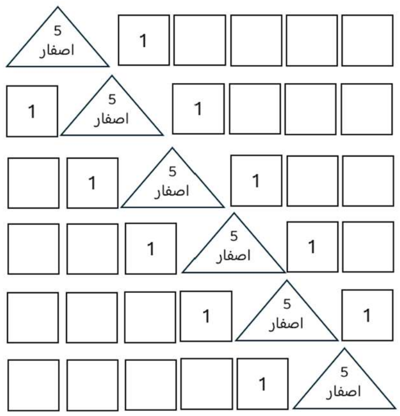
التي تقبل على 3: (1,8,3),(1,8,9),(7,8,9),(7,8,3) ولكل

منها ستة تراتيب: $4 \times 6 = 24$

(11)

الخمسة أصفار المتجاورة يمكن أن تبدأ في أي

موضع من 1 إلى 6 ولا يجاورهم صفر اخر.



إذا كانت في الطرف (البداية 1 أو 6) فهناك 4 خانات

حرة فقط: 2^4 لكل حالة منها. إذا كانت في الوسط

(البداية 2–5) فهناك 3 خانات حرة: 2^3 لكل حالة.

المجموع: $2^3 \cdot 4 + 2^4 \cdot 2 = 64$

(12)

$5 \times 10^3 = 5000$

(13)

$(4 \times 5^5) + (5^6) = 28125$

(14)

نختار موضع "1" (4 طرق) و "3" (3 طرق)، والباقي 8 احتمالات لكل خانة، ثم نطرح التي تبدأ بصفر:

$4 \times 3 \times 8 \times 8 - 3 \times 2 \times 8 = 720$.

(15)

$900 - 5^3 = 775$

(16)

نمنع تجاور رقمين زوجيين، والخانة الأولى لا تكون صفر. عدد اختيارات الفردي دائمًا 5، والزوجي 4 في الخانة الأولى (اليسار) و5 في الباقي. الأنماط المسموحة: OEOE ،OOOE ،OOEO ،OEOO ،OOOO (كل منها 5^4) و EOOO، EOEO، EOOE (كل منها 4×5^3) حيث O تعني فردي وE تعني زوجي.

$5 \times 625 + 3 \times (4 \times 125) = 3125 + 1500 = 4625$

(17)

$9 \times 9 \times 9 = 729$

(18)

نختار الزوج المرتّب (الأولى، الأخيرة) بحيث |الأولى – الأخيرة| = 2، مع منع الصفر في الخانة الأولى: للأولى من 1 إلى 9 يكون عدد الأزواج 15 (1 يعطي 1 زوج، 2 يعطي زوجين، 3–7 كل منها زوجان، 8 يعطي 1، 9 يعطي 1). بعد تثبيت الطرفين، نختار الخانات الوسطى الثلاث من الثماني خانات المتبقية المميزة وبترتيب: 8×7×6 = 336. إذن العدد الكلي = 15 × 336 = 5040.

(19)

في الاحاد 10 وفي العشرات 10 = 20

(18)

$8^3 = 512$ (a)

$8^4 = 4096$ (b)

$9^2 \times 8 = 648$ (c)

عدد الكلمات:

(21)

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7{,}893{,}600$$

(22)

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

(23)

$$(26 \times 25 \times 24) \times 26^3 = 274{,}185{,}600$$

(24)

$$3 \times 25 \times 25 = 1875$$

(25)

إما أن يظهر M مرة (3×25×24)، أو مرتين (3×25)، أو ثلاث مرات (1).

بجمعها: 1876 = 1 + 75 + 1800

(26)

$$26^3 - 25^3 = 1951$$

(27)

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$$

(28)

نبدأ بحرف واحد من A أو B أو C (ثلاث طرق). كل حرف يمكن أن يتبعه فقط حرفان مسموحان

A) أو C بعد A، A أو B بعد B، B أو C بعد C). إذن في كل خطوة يتضاعف عدد الكلمات. بعد 7 خانات يكون العدد = $3 \times 2^6 = 192$ كلمة جيدة.

(29)

$$21 \times 26^3 = 369{,}096$$

(30)

إذا كان بين x و y خمسة أحرف، فالمسافة بينهما 7 مواقع. إذن يمكن أن يبدأ الزوج في أي من المواقع 1 إلى 20 (26 − 7 +1= 20). لكل موضعين ممكنين (x قبل y أو y قبل x) أي × 2. ثم نرتب 24 حرفًا الباقين بأي ترتيب: !24 إذن العدد الكلي:

$$20 \times 2 \times 24 \times 23 \times 22 \ldots \times 2 \times 1$$

التباديل:

(32)

جميع المجموعات الجزئية ما عدا المجموعة الخالية (جميع الانوار مطفأة):

$$2^7 - 1 = 127$$

(31)

$$15 \times 14 = 210$$

(34)

a) $2026!$

b) نلون الصف الاول بـ 2024 طريقة (بدون الزوايا) والصف الاخير بـ 2023 طريقة (بدون الزوايا والخلية المختارة في الصف الأول)

وبقية الصفوف يكون لها $2024!$ طريقة مختلفة مع الزوايا وبدون الخليتين المختارتين في الصف الاول والاخير

الناتج: $2024! \times 2023 \times 2024$

(33)

a) $2^8 = 256$

b) $2^4 = 16$

c) $4 \times 2^4 = 64$

(35)

خانة الألوف يمكن أن تكون 1 أو 2، أي لدينا 2 طرق.

الحالة الأولى: إذا كانت خانة الألوف هي الرقم المكرر، نختار الرقم المكرر (2 طرق)، ونحدد الخانة الثانية التي تكرر فيها (3 طرق)، ثم نختار رقمين مختلفين من الأرقام الباقية (9×8÷2 = 36 طريقة) ونرتبهما (2×).

المجموع = 2×368×3×2 = 432 طريقة.

الحالة الثانية: إذا لم تكن خانة الألوف هي الرقم المكرر، نختار الرقم في الألوف (2 طرق)، والرقم المكرر من 9 أرقام أخرى (9 طرق)، ونختار موقعين له من الخانات الثلاث الباقية (3 طرق)، ثم نختار رقمًا مختلفًا للبقية (8 طرق).

المجموع = 2×9×3×8 = 432 طريقة.

بجمع الحالتين: 432 + 432 = 864 عددًا.

(37)

عدد الأعداد المطلوبة: الخانة الأولى زوجية $\neq 0$

إذًا هناك 4 اختيارات (2، 4، 6، 8)

الخانة الأخيرة زوجية مختلفة عن الأولى

(ممكن 0) إذًا 4 اختيارات

الخانات الوسطى 3 خانات من بين 8 أرقام

متبقية مرتبة: $^{8}P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

إذن العدد الكلي:

$$336 \times 4 \times 4 = 5376$$

(36)

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة من 9 عناصر هو:

$$2^9 = 512$$

بما ان لكل مجموعة جزئية ذات عدد زوجي يكون مكملها ذا عدد فردي، إذًا عدد المجموعات الزوجية هو نفسها الفردية.

إذًا كل منها عددها

$$\frac{512}{2} = 256$$

لكن المجموعة الخالية ضمن المجموعات الزوجية، ونريد غير الخالية: $256 - 1 = 255$ مجموعة

(38)

اختيار 3 فرق مرتّبة على المراكز: $1320 = 12 \times 11 \times 10 = {}^{12}P_3$ لأن الترتيب مهم

اختيار لاعب واحد من كل فريق: 25^3 لان لكل فريق 25 لاعب

العدد الكلي : 1320×25^3