وزارة التعليم
Ministry of Education

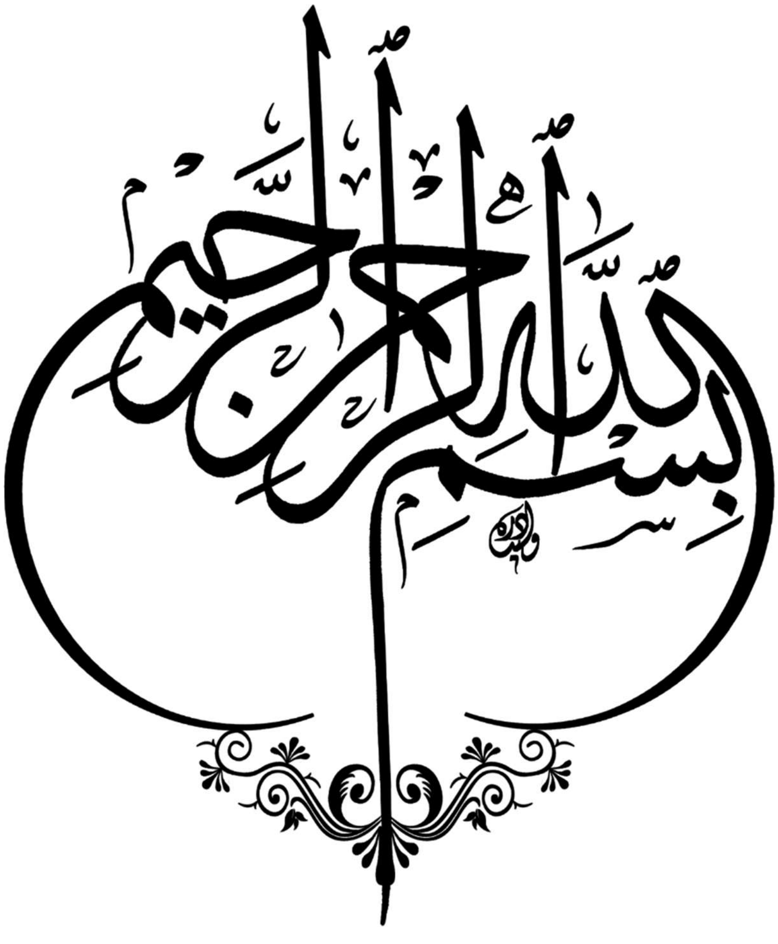
موهبة
Mawhiba

نسمو
NSMO

أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني "نسمو"

الحقيبة التدريبية لمسار رياضيات 01
مسابقة الفرق الوطنية 2026م

الرياضيات- ناشئين


بسم الله الرحمن الرحيم

الفهرس

مقدمة

أبناءنا وبناتنا المتفوقين،

نهديكم أسمى التهاني بوصولكم إلى **مرحلة الفرق الوطنية،** التي تمثل أحد أهم المحطات في رحلتكم الرياضية نحو التميز على مستوى المملكة.

في هذه الحقيبة تتعمقون أكثر في دراسة فروع الرياضيات الأربعة :**التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد،** مع موضوعات مثل التباديل ، تشابه المضلعات والقطع المتناسبة، التحليل إلى عوامل، والأعداد الأولية والمؤلفة.

تهدف هذه المرحلة إلى تمكينكم من استخدام المفاهيم الرياضية في بناء الحلول المعقدة، وتنمية مهارات التفكير المجرد، والتحليل الدقيق للمسائل.

إنها مرحلة تُظهر فيها روح الفريق الواحد والتعاون العلمي، وتؤهلكم لخوض منافسات أعمق في التفكير الرياضي العالمي.

فكونوا على قدر الطموح، وواصلوا طريق التميز بثقة وإصرار.

الفريق العلمي للأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات (نسمو) – مسار الرياضيات

الوحدة الأولى: الجبـــــــــــــر

معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد

لحل معادلة خطية في متغير واحد، نتبع الخطوات التالية بشكل مرتب:

- **التخلص من المقامات (إن وجدت)**

إذا كانت هناك كسور في المعادلة، نضرب كل حد في **المضاعف المشترك الأصغر (L.C.M)** للمقامات للتخلص منها.

- **فك الأقواس**

نستخدم قانون التوزيع لتبسيط الأقواس، مثل:

$$2(x+3) = 2x+6$$

- **نقل الحدود**

ننقل جميع الحدود التي تشمل المجهول في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر تبعاً للقاعدة:

لنقل حدود في معادلة من طرف لطرف آخر نعكس إشارتها والحدود غير المنقولة تظل إشارتها كما هي.

- **تجميع الحدود المتشابهة**

بعد النقل، نبسط الحدود حتى تصبح المعادلة على الشكل:

$ax = b$ حيث a و b ثوابت.

- **القسمة على معامل المتغير**

نقسم الطرفين على a (معامل المتغير) للحصول على الحل:

$$ax = b \Longrightarrow x = \frac{b}{a}$$

مع ملاحظة أن:

- عندما $a \neq 0$ يكون لدينا حل وحيد:

$$x = \frac{b}{a}$$

- عندما $a = 0\ , b \neq 0$ فلا يوجد حل.
- عندما $a = 0\ , b = 0$ فإن أي عدد حقيقي هو حل للمعادلة.

- **للتحقق من الحل**

نعوض قيمة المتغير الناتجة في المعادلة الأصلية: إذا تحققت المساواة فالحل صحيح، وإذا لم تتحقق فهناك خطأ في خطواتنا.

- **ملاحظة:** أحياناً لا نلتزم حرفياً بالترتيب السابق عندما نجد حل أقرب.

مثال:

حل المعادلة:

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1$$

الحل:

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1$$

بضرب الطرفين في 10
$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8=10$$

بطرح 8 من الطرفين
$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]=2$$

بضرب الطرفين في 9
$$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16=18$$

بطرح 16 من الطرفين
$$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)=2$$

بضرب الطرفين في 5
$$\frac{x+2}{3}+8=10$$

بطرح 8 من الطرفين
$$\frac{x+2}{3}=2$$

بضرب الطرفين في 3
$$x+2=6$$

بطرح 2 من الطرفين
$$x=4$$

تدريبات:

(1) حل المعادلة:

$$1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}$$

(2) إذا كان a,b,c أعداداً ثابتة موجبة، حل المعادلة:

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$$

(3) حل المعادلة:

$$(x-3)^2+(x+1)^2+(4x-5)^2=0$$

(4) حل المعادلة:

$$ax+b-\frac{5x+2ab}{5}=\frac{1}{4}$$

(5) إذا كانت المعادلة:

$$a(2x+3)+3bx=12x+5$$

لهاعدد لا نهائي من الحلول للمتغير x. أوجد قيمة كل من a,b .

(6) إذا كانت المعادلة:

$$2a(x+6)=4x+1$$

ليس لها حلول، أوجد قيمة a .

(7) إذا كانت المعادلة: $kx=12$ لها حلول صحيحة موجبة، بحيث k عدد صحيح. أوجد عدد قيم k الممكنة.

(8) كم عدد قيم x الصحيحة الموجبة الممكنة التي تحقق المعادلة:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$$

(9) إذا كان حل المعادلة:

$$3a-x=\frac{x}{2}+3$$

هو 4. أوجد قيمة: $(-a)^2-2a$.

(10) حل المعادلة:

$$\frac{x-n}{m}-\frac{x-m}{n}=\frac{m}{n}$$

بحيث: $mn\neq 0$.

نظام المعادلات الخطية الآنية

الصورة العامة لمعادلتين خطيتين في مجهولين هي:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

حيث إنّ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ أعداد حقيقة.

وهما معادلتان من الدرجة الأولى في متغيرين. وتمثل في المستوى الإحداثي خطين مستقيمين ويكون حل النظام هو إيجاد نقاط التقاطع المشتركة بين المستقيمين (لأنها تمثل حل لكلتي المعادلتين).

ولحذف أحد المتغيرات لحل النظام نستخدم:

(i) العمليات على المعادلات المعتادة.

(ii) طريقة التعويض.

وفي كثير من الأحيان تكون الطريقة (i) أكثر فاعلية.

- عندما

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

إذن المستقيمان متقاطعان في نقطة واحدة بالتالي النظام له حل وحيد وهو:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

- عندما

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

فإن المستقيمين منطبقان وبالتالي جميع نقاطهما مشتركة، ولذلك النظام له عدد لانهائي من الحلول.

- عندما

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

فإن المستقيمين متوازيان ولا يوجد بينهما نقاط تقاطع بالتالي النظام غير متناسق، أي ليس له حل.

تدريبات:

(1) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{5} - \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{1}{2}, \\ 2(x-y) - 3(x+y) + 1 = 0 \end{cases}$$

(2) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} 5.4x + 4.6y = 104 \\ 4.6x + 5.4y = 96 \end{cases}$$

(3) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} x + 2(5x + y) = 16 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

(4) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

(5) حل نظام المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$$

(6) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = a \\ 5y - z + 3x = b \\ 5z - x + 3y = c \end{cases}$$

(7) إذا كان $x = 2, \quad y = 1$ حلول النظام:

$$\begin{cases} ax + by = 7 \\ bx + cy = 5 \end{cases}$$

فأوجد معادلة توضح العلاقة بين a, c.

(8) أوجد قيمة (a, b, c) إذا كان النظامان:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4ax + 5by - z = -22 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax - by + z = 8 \\ x + y + 5 = c \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

لهما نفس الحل.

(9) أوجد قيمة k التي تجعل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} kx - y = -\dfrac{1}{3} \\ 3y = 1 - 6x \end{cases}$$

(a) له حل وحيد. (b) ليس له حل. (c) له عدد لا نهائي من الحلول.

(10) إذا كانت x, y, z تحقق نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} 2020(x - y) + 2021(y - z) + 2022(z - x) = 0 \\ 2020^2(x - y) + 2021^2(y - z) + 2022^2(z - x) = 2021 \end{cases}$$

أوجد قيمة $z - y$.

(11) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ y - z - x = 1 \\ z - x - y = -15 \end{cases}$$

(12) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z + u = 2 \\ z - u + v = 3 \\ u - v + x = 4 \\ v - x + y = 5 \end{cases}$$

التحليل إلى عوامل

تحليل المقدار الجبري يعني تحويله إلى حاصل ضرب عاملين أو أكثر.

عدد حدود المقدار: **حدان جبريان.** (بعد إخراج العامل المشترك قد يكون المقدار)	
فرق بين مربعين.	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
فرق بين مكعبين.	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
مجموع مكعبين.	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

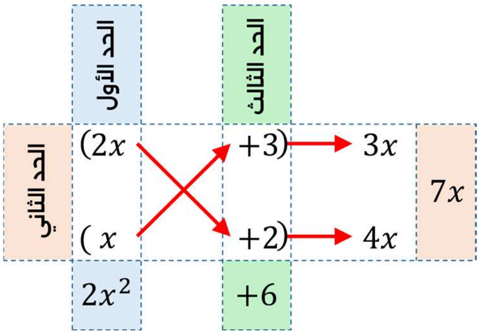
عدد حدود المقدار: **ثلاث حدود جبرية.** ax^2+bx+c حيث a, b, c ثوابت و $a \neq 0$	
عند $a = 1$	**1**) يجب قبل البدء في التحليل ترتيب حدود المقدار الثلاثي تنازلياً حسب الرمز المستخدم. **2**) يجب البحث عن عامل مشترك بين حدود المقدار الجبري وإخراجه أولاً ثم تحليل المقدار الناتج. **3**) إذا كانت إشارة الحد الأخير (موجبة) تكون إشارتا تحليله متشابهتان ومثل الحد الوسط في المقدار الأصلي. $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$ $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ **4**) إذا كانت إشارة الحد الأخير (سالبة) تكون إشارتا تحليله مختلفتين ويأخذ أكبرهما عددياً إشارة الحد الأوسط. $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$ $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$
عند $a \neq 0,1$	يحلل المقدار إلى عاملين بحيث: **1**) الحد الأول ax^2 يحلل إلى عاملين حاصل ضربهما ax^2 **2**) يحلل الحد الأخير c إلى عاملين حاصل ضربهما c **3**) ناتج (حاصل ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين) = الحد الأوسط bx

مثال 1:

حلل:

$$2x^2 + 7x + 6$$

الحل:



الحد الأول $2x \cdot x = 2x^2$

الحد الثالث $2 \cdot 3 = 6$

الحد الثالث $3x + 4x = 7x$

أي أن:

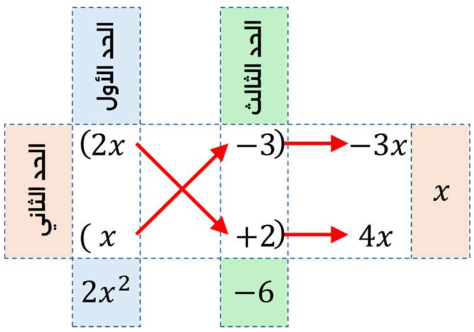
$$2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2)$$

مثال2:

حلل:

$$2x^2 + x - 6$$

الحل:



الحد الأول $2x \cdot x = 2x^2$

الحد الثالث $2 \cdot (-3) = -6$

الحد الثالث $-3x + 4x = x$

أي أن:

$$2x^2 + 7x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$$

تدريبات:

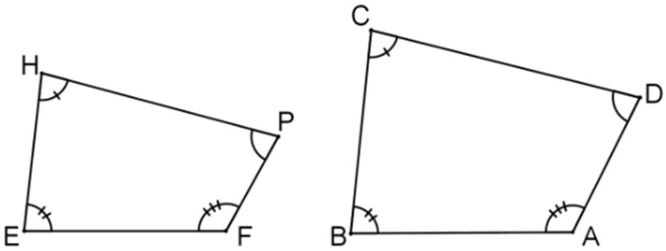
حلل تحليلًا كاملًا:

1) $x^2 - 8x + 7$	2) $x^2 - 6x - 7$
3) $x^2 - 25$	4) $2x^2 - 50$
5) $x^2 - 13x + 42$	6) $2x^2 + 5x + 2$
7) $x^3 - 1000$	8) $15x^3 + 7x^2 - 2x$
9) $5x^3 - 625$	10) $30x^4 + 5x^3 - 5x^2$
11) $x^2 - 2x + 1$	12) $x^2 + 10x + 25$
13) $6x^3y - 13x^2y + 6xy$	14) $2x^2 + 10x + 12$
15) $12x^2y^2 - 15xy^2 - 63y^2$	16) $24x^3 + 10x^2y - 50xy^2$
17) $9 - 4y^2$	18) $x^{12} - 1$
19) $\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{9}$	20) $y^6 - 81$

الوحدة الثانية: الهندســـة

التشابه

*تعريف*1:



يتشابه أي مضلعين إذا تحقق الشرطان الآتيان:

(1) تساوي قياسات الزوايا المتناظرة. (2) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

ففي المضلعين الموضحين بالشكل إذا كان:

$$\left\{\begin{array}{c} \angle A = \angle F \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle H \\ \angle D = \angle P \\ \frac{AB}{FE} = \frac{BC}{EH} = \frac{CD}{HP} = \frac{DA}{PF} \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \sim FEHP$$

نظرية 1:

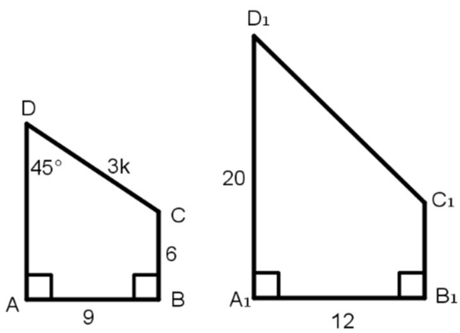
النسبة بين طولي محيطي مضلعين متشابهين تساوي نفس نسبة التشابه بين أي ضلعين متناظرين فيهما

تدريبات:

في التدريبات (8 – 1) اختر الكلمة المناسبة من بين (دائما متشابهان – أحيانا متشابهان –التشابه مستحيل):

م	المضلعان	دائما متشابهان	أحيانا متشابهان	التشابه مستحيل
(1)	مثلثان متطابقا الأضلاع			
(2)	مثلثان متطابقا الضلعين.			
(3)	مربعان.			
(4)	معينان.			
(5)	مثلثان قائما الزاوية.			
(6)	مثلثان مختلفا الأضلاع.			
(7)	مستطيلان.			
(8)	مثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا.			

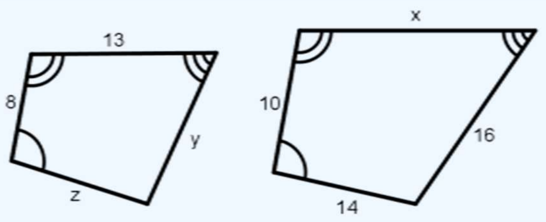
التدريبات 16 – 9 على الشكل التالي: حيث الرباعي $ABCD \sim$ الرباعي $A_1B_1C_1D_1$.



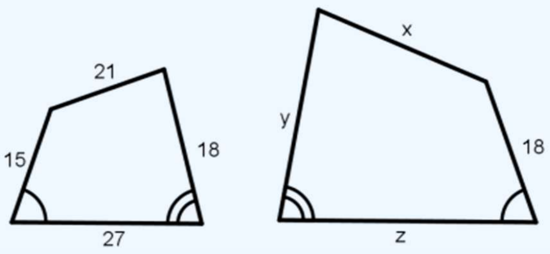
(9)	**نسبة التشابه بين $ABCD$ ، $A_1B_1C_1D_1$.**	
(10)	ما هو نوع الرباعي $A_1B_1C_1D_1$؟ وضح اجابتك.	
(11)	$m\angle D_1$ يساوي	
(12)	$m\angle C_1$ يساوي.	
(13)	C_1B_1 يساوي.	
(14)	أوجد AD يساوي.	
(15)	C_1D_1 يساوي.	
(16)	النسبة بين محيطي المضلعين يساوي.	

في التدريبين (18 − 17) أوجد قيمة x, y, z حيث إن كل زوجين من المضلعات في الشكل متشابهان.

(17)



(18)



تشابه المثلثات

نظرية 2:
لكل مثلثين متشابهين:

(1)الأضلاع المتناظرة متناسبة.

(2)الارتفاعات المتناظرة متناسبة ولهما نفس نسبة التشابه.

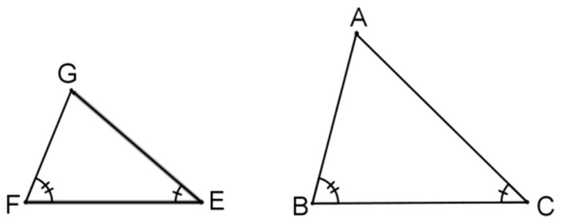
(3)المتوسطات المتناظرة متناسبة ولهما نفس نسبة التشابه.

مسلمة التشابه (AAA)

نظرية 3:
مسلمة التشابه:$\boldsymbol{AAA}$

يتشابه المثلثان إذا تساوت قياسات زوايا المثلث الأول الزوايا المناظرة لها في المثلث الآخر. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار $(A.A.A)$. وبالطبع يكفي إثبات التشابه بتساوي زاويتين فقط، لأن ذلك يقتضي تساوي الزاوية الثالثة في كل مثلث

على الشكل:



في $\Delta ABC, \Delta GFE$ بما أن:

$\angle B = \angle F, \angle E = \angle C$.

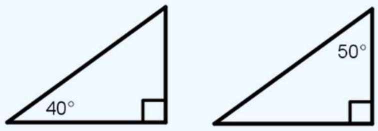
إذن يتشابه المثلثان وينتج أن

$$\frac{AB}{GF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{EG}.$$

تدريبات:

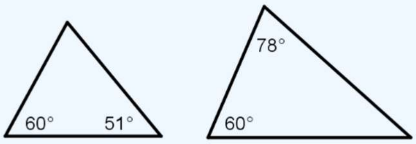
في التدريبات (1 – 9) حدد المثلثين المتشابهين، وإذا لم تتوصل لاستنتاج فاكتب "لا يمكن الاستنتاج".

(1)



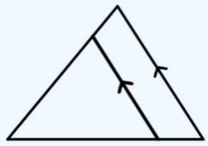
....

(2)



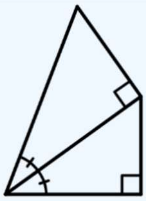
....

(3)



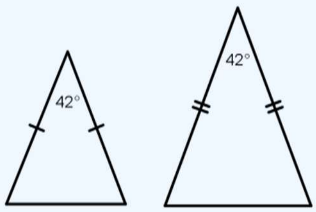
....

(4)



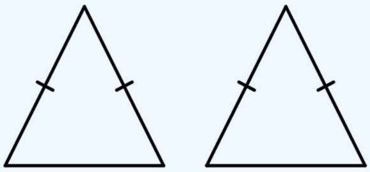
....

(5)



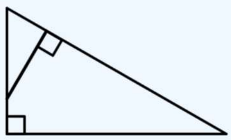
....

(6)



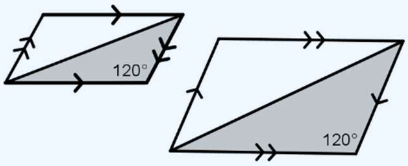
....

(7)



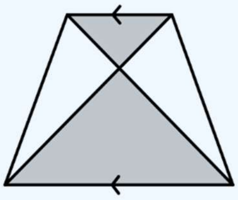
....

(8)



....

(9)



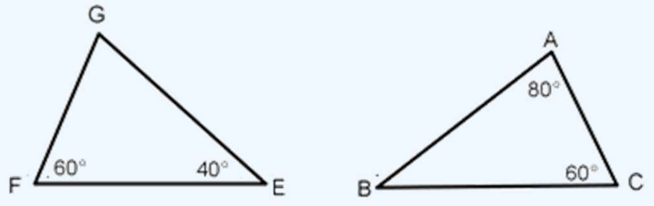
....

(10) انظر الشكل التالي ثم ضع الرموز على المثلثين وأكمل

$\angle ABC =$ ______

$\Delta ABC \sim$ ______

$$\frac{AB}{\dots\dots} = \frac{BC}{\dots\dots} = \frac{AC}{\dots\dots}$$

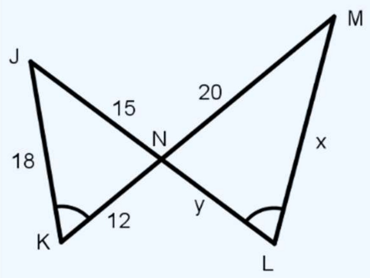


(11) انظر الشكل ثم أكمل

$\Delta JKN \sim \dots\dots\dots\dots\dots$ (a

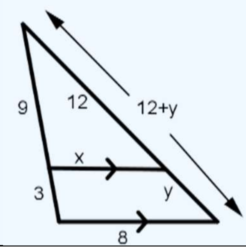
$\frac{15}{\dots\dots} = \frac{12}{\dots\dots}$, $\frac{15}{\dots\dots} = \frac{18}{\dots\dots}$ (b

$x = \cdots$, $y = \cdots$ (c

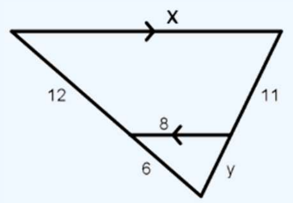


في التدريبات $(12 - 14)$ أوجد قيمة x, y.

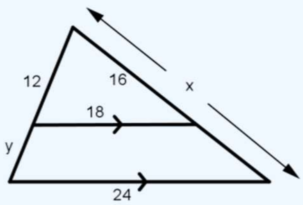
(12)



(13)



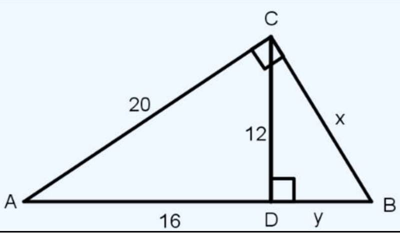
(14)



(15) على الشكل التالي:

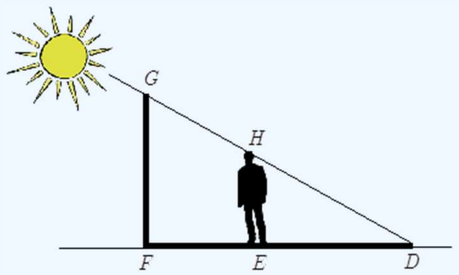
a) سمّ مثلثين يشابهان المثلث ABC

b) أوجد قيمة x, y.

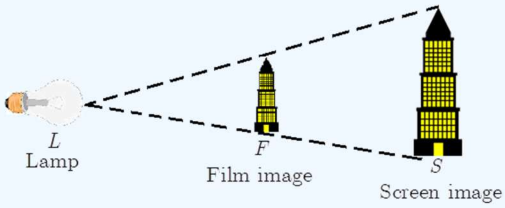


(16) لتقدير ارتفاع عمود كرة السلة، وقف أحد اللاعبين والذي طوله بالضبط يساوي $2m$ بحيث تكون نهاية ظله مع نهاية ظل العمود منطبقتين تماما، وعند ذلك وجدنا أن $\overline{DE} = 1.6$, $\overline{DF} = 4.4$

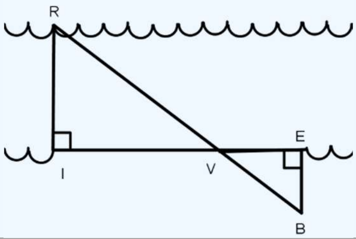
أوجد طول العمود.



(17) على الشكل التالي: القياسات ليست حقيقة، وفيه تظهر صورة البناية في الفيلم وعلى الشاشة، فإذا كانت $LF = 6cm, LS = 24m$، وكان طول البناية على الشاشة يساوي $2.2m$. ما هو طول البناية في الفيلم.



(18) على الشكل إذا كان $IV = 63m, VE = 20m, BE = 15m$ أوجد عرض النهر RI.



نظريات التشابه $(SAS), (SSS)$

نظرية 4:
يتشابه المثلثان إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتوي هاتين الزاويتين. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار $(S.A.S)$.

نظرية 5:
يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار $(S.S.S)$.

إذن لكل مثلثين متشابهين:

(1) الأضلاع المتناظرة متناسبة.

(2) الارتفاعات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

(3) المتوسطات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

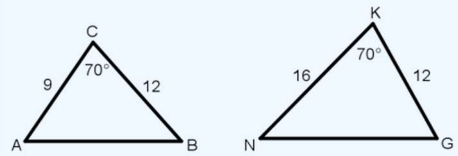
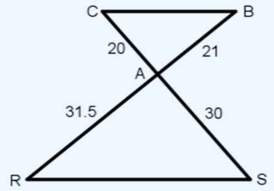
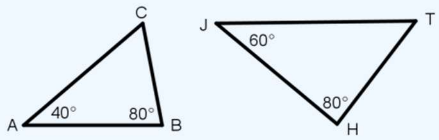
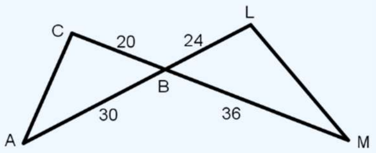
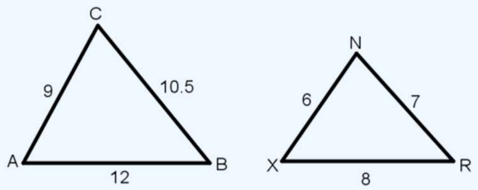
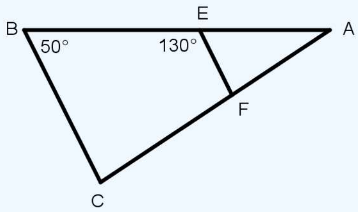
(4) منصفات الزوايا المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

(5) طولا محيطيهما لهما نفس نسبة التشابه.

(6) النسبة بين مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه.

تدريبات:

في التدريبات (19 – 24) حدد المثلثين المتشابهين، وكذلك النظرية أو النتيجة التي تثبت ذلك.

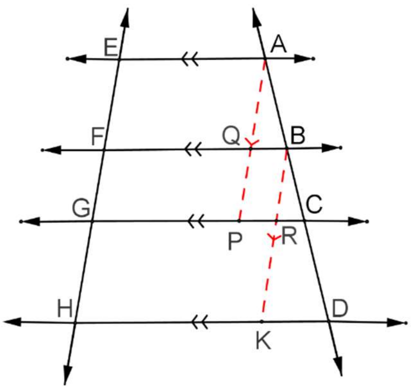
(19)		(20)	 ....
(21)		(22)	 ....
(23)		(24)	 ....

الأطوال المتناسبة

نظرية 6 : **(نظرية طالس العامة)**

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع القطع الناتجة على القاطع الآخر.

البرهان:



لدينا هنا $AE \parallel BF \parallel GC \parallel HD$ يقطعهم المستقيمان AD, EH والمطلوب إثبات أن:

$$\boxed{\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}}$$

ولبرهان هذه النظرية نرسم AP, BK يوازيان EH كما بالشكل المجاور. وبما أن:

$AQFE, QPGF, BRGF, RKHG$ متوازيات أضلاع.

إذن

$$AQ = EF, BR = QP = FG, RK = GH.$$

وبما أنه في ΔAPC ، $BQ \parallel PC$ ، إذن

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{QP} \Longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG} \Longrightarrow \boxed{\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}}$$

وبالمثل في ΔBKD ، $BQ \parallel PC$ يمكننا الحصول على

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BR}{RK} \Longrightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{FG}{GH} \Longrightarrow \boxed{\frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}}$$

إذن

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

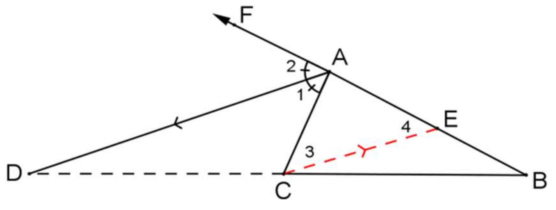
نظرية 7:

إذا رسم مستقيم يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة

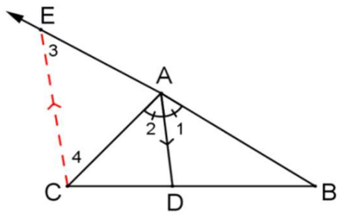
نظرية 8: (نظرية منصف الزاوية)

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة له عند هذه الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي ضلعي المثلث الآخرين.

البرهان:



شكل 2



شكل 1

في شكل 1: الشعاع AD ينصف $\angle CAB$ ويقطع BC في D.

في شكل 2: الشعاع AD ينصف $\angle CAF$ ويقطع الشعاع BC في D

والآن المطلوب إثبات أن $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. ولإثبات ذلك نرسم $CE \parallel AD$ يقطع AB في E.

إذن

$$\angle 2 = \angle 4 \text{ ، } \angle 1 = \angle 3$$

إذن

$$\angle 3 = \angle 4 .$$

ومن ذلك

$$AE = AC .$$

بما أن

$$CE \parallel AD .$$

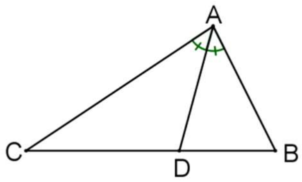
إذن

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} .$$

وعليه نصل إلى المطلوب

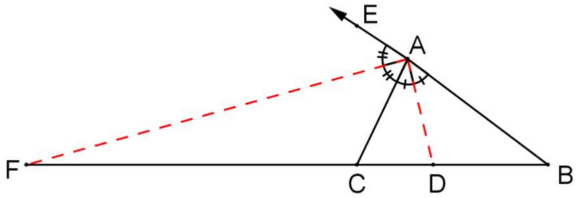
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} .$$

ملاحظات:



(1) يتحقق عكس النظرية فإذا كان D تقسم BC بحيث $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ فإن AD ينصف $\angle A$.

(2) AF, AD المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية A.



من نظرية منصف الزاوية

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}, \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

إذن

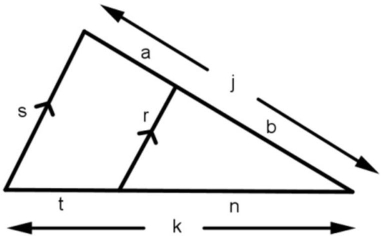
$$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{DC}.$$

ملاحظة مهمة:

قياس الزاوية بين المنصفين الداخلي والخارجي لنفس الزاوية= $90°$

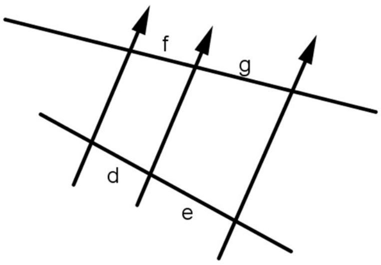
تدريبات:

(1) انظر الشكل التالي، ثم حدد أي التناسبات التالية صحيحة.



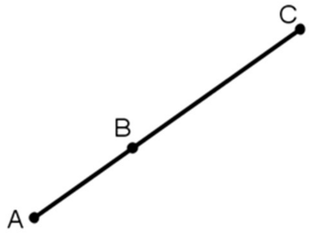
الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{a}{b}=\frac{r}{s}$	
(b)	$\frac{a}{j}=\frac{t}{k}$	
(c)	$\frac{s}{r}=\frac{j}{a}$	
(d)	$\frac{n}{k}=\frac{r}{s}$	
(e)	$\frac{n}{t}=\frac{a}{b}$	
(f)	$\frac{t}{k}=\frac{b}{j}$	

(2) انظر الشكل التالي، ثم حدد أي التناسبات التالية صحيحة.



الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{g}{e}=\frac{d}{f}$	
(b)	$\frac{e}{d}=\frac{f}{g}$	
(c)	$\frac{e}{d}=\frac{g}{f}$	
(d)	$\frac{e}{g}=\frac{d}{f}$	

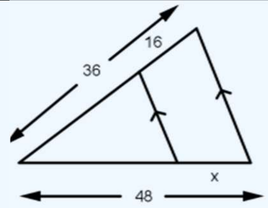
في التدريبات (3 – 6) أكمل الجدول التالي إذا كان $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$.



(6)	(5)	(4)	(3)	
			6	AB
		25		BC
100	56			AC

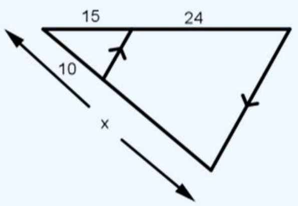
في التدريبات (7 – 14) أوجد قيمة x, y.

(7)



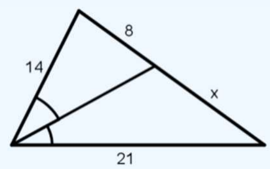
....

(8)



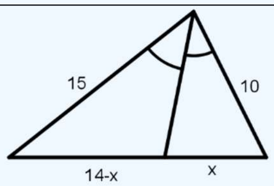
....

(9)



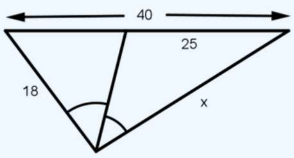
....

(10)



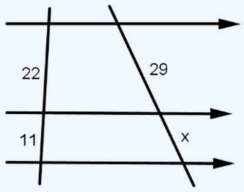
....

(11)



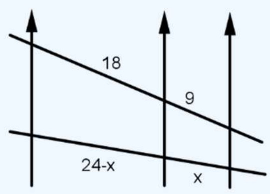
....

(12)



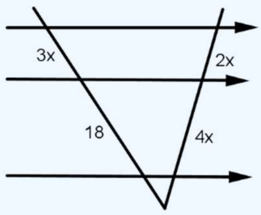
....

(13)



....

(14)



....

الوحدة الثالثة: نظرية الاعداد

الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة

مراجعة

- من بين كل الأعداد الصحيحة الموجبة العدد 1 هو العدد الوحيد الذي له قاسم موجب وحيد، وهو الواحد نفسه.
- كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 لها على الأقل قاسمان موجبان.
- إذا كان العدد الصحيح الموجب له فقط قاسمان موجبان- وهما 1 والعدد نفسه- سُمي العدد أولي.
-كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 والتي ليست أولية تسمى أعداد مؤلفة.

من التعريفات السابقة نستنتج:

- العدد 1 ليس أولي ولا مؤلف،
- يوجد عدد زوجي أولي وحيد وهو 2 وهو أصغر عدد أولي،
- أصغر عدد مؤلف هو 4.

كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 يمكن تحليلها لعواملها الأولية. بمعنى:

$N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{\alpha_k}$ حيث $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$

أعداد أولية مختلفة ، $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ أعداد صحيحة غير سالبة ، وسيكون عدد قواسم N الموجبة هي:

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)....(\alpha_k+1)$.

مثال:

إذا كان p, p^3+5 عددين أوليين ، فإن p^5+7 عدد ....

(a) أولي. (b) مؤلف. (c) أولي أو مؤلف. (d) لا أولي ولا مؤلف.

الحل:

الإجابة (b) مؤلف.

إذا كانت p عدد فردي فإن p^3+5 عدد زوجي أكبر من 5 وهذا يناقض كونه أوليًا، وبالتالي p عدد زوجي وأولي، ومن ثم $p=2$ ، بالفعل $p^3+5=13$ أولي ، وعندها $p^5+7=2^5+7=39$ عدد مؤلف.

مثال 2: معطى ثلاثة أعداد أولية p, q, r تحقق $p+q=r, p<q$ أوجد قيمة p.

الحل: إذا كانت r زوجي فلدينا حالتان:

الأولى: p, q كلاهما زوجي وعندها $p=q=2$. وهذا يناقض $p<q$.

الثانية: p, q كلاهما فردي وعندها سيكون r عدد زوجي أكبر من 2. وهذا يناقض كون r عدد أولي.

وبالتالي r عدد فردي، ومن ثم p, q أحدهما فردي والآخر زوجي، ولأن أصغر عدد أولي هو 2. فإن $p=2$.

تدريبات :

1) معطى أن x, y أوليان، أوجد عدد الثنائيات المرتبة حلول المعادلة $x + y = 75$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2) لنسمي العدد الأولي المكون من خانتين $\overline{ab}$ عدداً مشاغباً إذا كان العدد $\overline{ba}$ أيضاً أولي.

السؤال: كم عدد أولي من خانتين مشاغب؟

3) معطى الأعداد الأولية المختلفة a, b, c تحقق المعادلة $ab^b c + a = 2000$.

أوجد كل القيم الممكنة للعدد $a + b + c$.

4) معطى أن الأعداد $p, q, p - q$ أولية، $p + q$ عدد زوجي. أوجد قيمة $(1 + \frac{1}{2})^p (1 - \frac{1}{3})^q$.

5) تحدي: إذا علمت أن n عدد صحيح موجب بحيث $n + 3, n + 7$ عددان أوليان، أوجد باقي قسمة n على 3.

6) تحدي: إذا كان p عدد أولي ليس أقل من 5، العدد $2p + 1$ أولي ايضاً، اثبت أن $4p + 1$ عدد مؤلف.

7) لدينا المعادلة: $56a = 65b$. أثبت أن لكل زوج مرتب طبيعي (a, b) يمثل حل للمعادلة فإن $a + b$ يكون عدداً مؤلفاً.

8) لدينا $m > n$ عددان صحيحان موجبان بحيث $m^2 - n^2 - 2m - 2n = 19$.

أوجد قيمة m, n.

9) معطى ثلاثة أعداد أولية p, q, r تحقق $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1661}{1986}$ أوجد قيمة $p + q + r$.

10) إذا علمت أن m, n عدادان أوليان مختلفان ، $p = m + n + mn$. عندما p قيمة صغرى. ما قيمة المقدار $\frac{m^2+n^2}{p^2}$.

11) إذا علمت أن p,q أعداد أولية، $p=m+n, q=mn$ حيث m,n عددان صحيحان موجبان.

فأوجد قيمة المقدار $\frac{p^p+q^q}{m^n+n^m}$.

12) إذا كان p,q عددان أوليان يحققان المعادلة: $5p+7q=129$.

فأوجد قيم $p+q$.

13) تحدي: معطى أن $p, p+2, p+6, p+8, p+14$ أعداد أولية. أوجد العدد p.

14) ليكن p,q عددان متتاليان وأوليان ، العدد الصحيح الثابت n يحقق أن:

$$\{n-1, 3n-19, 38-5n, 7n-45\} = \{p, 2p, q, 2q\}$$

ليس بالضرورة بهذا الترتيب. أوجد قيمة n.

15) تحدي: أثبت أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم الصحيحة الموجبة للعدد n تجعل العدد n^2+n+41 مؤلفاً.

الوحدة الرابعة: التركيبـــــات

التباديل

التباديل: إذا كان لدينا مجموعة تحوي n من الاشياء وأردنا اختيار k منها مع مراعاة الترتيب وبدون تكرار، فإن عدد الاختيارات هو:

$$^{n}P_{k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

ويقرأ n تباديل k

بعد ان تعرفنا على مفهوم التباديل، نرى التدريب التالي:

مثال:

بكم طريقة يمكن للأصدقاء أحمد ومحمد ويونس وحمزة وهاشم أن يقفوا في صف واحد لالتقاط صورة جماعية؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم في صف لالتقاط الصورة؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم على الأقل في صف لالتقاط الصورة؟

الحل:

عند ترتيب الأصدقاء الخمسة جميعًا في صف: عدد الطرق $120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = {}^{5}P_{5}$

وعند ترتيب ثلاثة فقط منهم: عدد الطرق: $60 = {}^{5}P_{3}$

وعند ترتيب ثلاثة على الأقل: عدد الطرق هو

$$= {}^{5}P_{3} + {}^{5}P_{4} + {}^{5}P_{5} = 60 + 120 + 120 = \mathbf{300}$$

ملاحظة: يمكننا كتابة $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ كـ $5!$ ويقرأ مضروب 5.

احسب $3!$, $4!$ ؟ وماذا تلاحظ؟

ملاحظة: لأي عدد صحيح موجب n، لدينا $n! = (n-1)! \cdot n$

المضروب: مضروب n هو حاصل ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة التي اقل من او تساوي n ويرمز لها بعلامة التعجب (!):

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

لاحظ ان:

$$^{n}P_{n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

وهو يمثل ترتيب n من الاشياء في صف واحد مع مراعاة الترتيب

تدريبات:

(1) ملعب كرة قدم له خمسة عشر باب. بكم طريقة يمكنك الدخول من باب والخروج من باب آخر؟

(2) في صالة اجتماعات توجد 7 مصابيح. لنحافظ على الانارة مناسبة للصالة يجب أن تكون واحدة على الأقل من المصابيح مشتغلة. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

ملاحظة: بنفس طريق التدريب الاخير السابق، يمكن استنتاج مباشرة من قاعدة الضرب أن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوي n عنصراً هو 2^n حيث إن كل عنصر له حالتين بالنسبة للمجموعة الجزئية فإما ينتمي أو لا ينتمي. أي أن:

عد المجموعات الجزئية: عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوي n عنصر يساوي 2^n

تدريبات:

(3) لدينا المجموعة $\{1,2,3,\ldots,8\}$،

(a) كم عدد المجموعات الجزئية منها؟

(b) كم عدد المجموعات الجزئية منها والتي لا تحوي عدد فردي؟

(c) كم عدد المجموعات الجزئية منها والتي تحوي عدد فردي واحد فقط؟

(4) لدينا لوحة مربعة مقسمة مربعات متطابقة بعدي اللوحة 2026×2026 وأردنا نظلل المربعات في اللوحة بحيث نظلل مربع واحد بالضبط في كل صف وفي كل العمود. (بفرض أن التدوير والقلب يعطي أشكال مختلفة) (a بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟ (b لو اشترطنا عدم تظليل المربعات في الزوايا بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

(5) كم عدد مكون من أربع خانات فيه خانتين متطابقتين فقط وتحوي خانة الألوف فيه رقم أصغر من 3؟

خواص التباديل

التباديل مع التكرار

(6) أوجد عدد تبديلات حروف الكلمة $PARALLEL$؟

في التدريب السابق، نلاحظ تكرار بعض الكلمات عند استخدام اسلوب التباديل العادي،
لأن ترتيب الحرف A الأول والثاني لا يُحدث فرقًا فعليًا وكذلك مع حرف L.

التباديل مع التكرار:

عدد التباديل لأشياء عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 مرة والثاني r_2 والثالث r_3 يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3!}$$

ننتقل الان لبعض التمارين:

(7) كم عدد طرق إعادة ترتيب حروف الكلمة التالية $abcaadbddd$ ؟

(8) كم عدد طرق إعادة ترتيب أرقام العدد 456733727 ؟

(9) لدينا الأرقام التالية 1,2,3,1,4,5,5

(a) كم عدد الأعداد الممكن تكوينها من ترتيب جميع الأرقام السابقة

(b) كم عدد الأعداد الممكن تكوينها من ترتيب جميع الأرقام السابقة بشرط أن تبدأ وتنتهي بالرقم 5؟

(10) كم عدد الكلمات المتكونة من حروف الكلمة $SAUD$ ؟

(11) بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حروف كلمة $SALMAN$ ؟

(12) بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حروف كلمة $ARABIA$ بشرط أن يكون الحرف B بين حرفين A (ليست بالضرورة متجاورة).

(13) كم عدد الكلمات المختلفة المكونة من حروف كلمة $ELEMENTARY$ والتي تظهر فيها حروف E الثلاث متجاورة؟

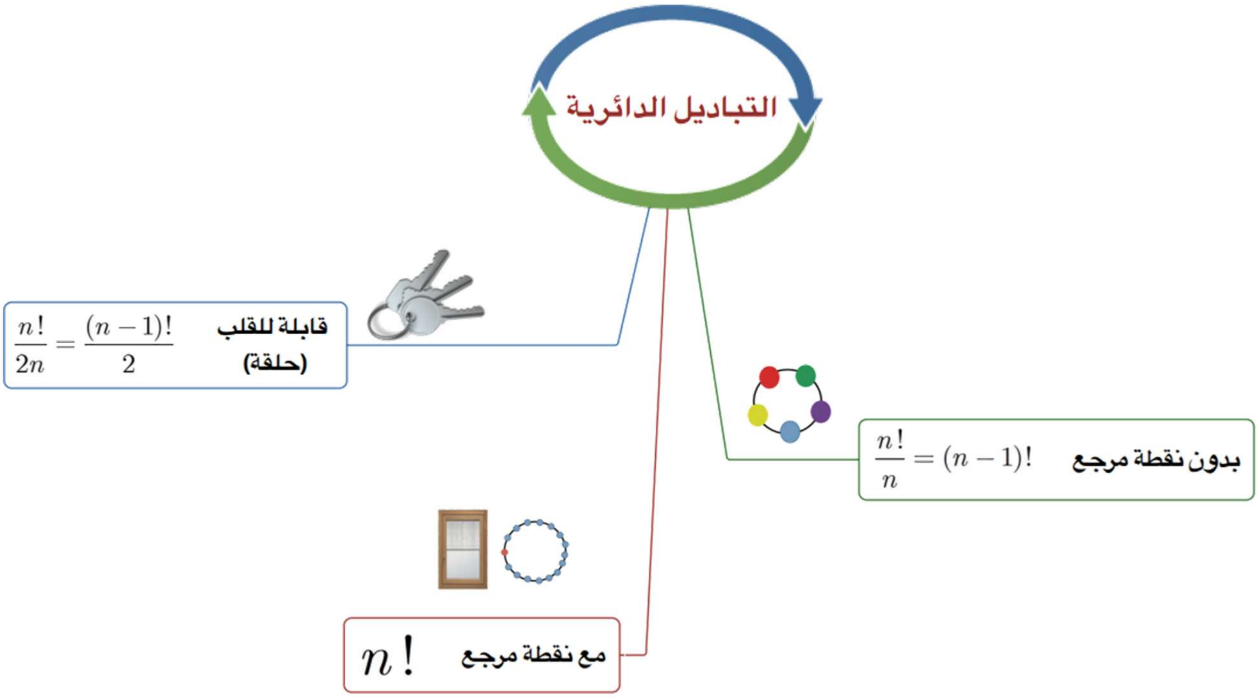
(14) كم عدد الثلاثيات المرتبة من الأعداد الصحيحة الموجبة (a, b, c) بحيث أن حاصل ضربها $a \times b \times c = 231$

التباديل الدائري

(55) بكم طريقة يمكن ترتيب خمس علب بهارات (ملح، زنجبيل، كمون، فلفل، زعتر) على شكل دائري؟

التباديل الدائري: عدد التباديل المختلفة لn من الاشياء مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$



تدريبات:

(16) بكم طريقة يمكن ترتيب: 5 أشياء حول دائرة؟ 7 أشياء حول دائرة؟ n من الأشياء حول دائرة؟

(17) بكم طريقة يمكن أن يجلس ثمانية اشخاص حول طاولة مستديرة بحيث أحد الكراسي باللون الأحمر والبقية باللون سوداء؟

(18) بكم طريقة يمكن ترتيب:

a) 36 شخص حول دائرة؟

b) 7 لاعبين على شكل دائرة بحيث أن أحدهم خلف الحكم؟

(19)

a) بكم طريقة يمكن جلوس 5 طلاب حول طاولة مستديرة؟

b) وبكم طريقة يمكن ذلك إذا كان أحد الكراسي أسفل النافذة؟

(20) سلسلة دائرية تحتوي على أنواع مختلفة من الخرز، كم عدد السلاسل المختلفة التي نستطيع تكوينها من 13 خرزه:

a) إذا لم يسمح بقلب السلسلة؟

b) إذا كان قلب السلسلة مسموح؟

(21) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط ألا يجلس مهندسان جوار بعضهما البعض؟

(22)

a) بكم طريقة يمكن تجليس 7 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط ألا يجلس طبيبان جوار بعضهما البعض؟

b) وبكم طريقة يمكن ذلك إذا لم يسمح بجلوس مهندسان بجوار بعضهما؟

حلـــول التدريبات

حلول (الجبر)

معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد:

تدريبات:

(1)

بما أن المعادلة المعطاة تحتوي على كسور مركبة في كلا الطرفين، فمن الأفضل تبسيط كل طرف على حدة أولاً.

من الطرف الأيسر:

$$1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}=1-\frac{5x-(1+3x)}{15}=\frac{15-2x+1}{15}=\frac{16-2x}{15}$$

ومن الطرف الأيمن:

$$\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}=\frac{x}{2}-\frac{14x-(10-6x)}{14}=\frac{10-13x}{14}$$

التالي نحصل على المعادلة:

$$\frac{16-2x}{15}=\frac{10-13x}{14}$$

$$\Longrightarrow 14(16-2x)=15(10-13x)$$
$$\Longrightarrow 224-28x=150-195x$$
$$\Longrightarrow x=-\frac{74}{167}$$

(2)

بنقل العدد 3 في المعادلة المعطاة إلى الطرف الأيسر، نحصل على:

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{x-a-b-c}{c}+\frac{x-a-b-c}{a}+\frac{x-a-b-c}{b}=0$$

$$\Longrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\because \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0, \therefore x-a-b-c=0$$

$$\Longrightarrow x=a+b+c$$

(3)

في المعادلة: $$(x-3)^2+(x+1)^2+(4x-5)^2=0$$

لدينا ثلاثة حدود غير سالبة مجموعها يساوي 0 .

وحتى يكون مجموعها صفرًا، **لا بد أن يكون كل حد منها صفرًا في الوقت نفسه**. لكن هذا يتطلّب:

$$x=3, x=-1, x=\frac{5}{4}$$

معًا، وهو مستحيل. إذًا لا يوجد حل حقيقي (ولا حتى مركب) لهذه المعادلة.

(4)

بإزالة المقام من المعادلة المعطاة نحصل على:

$$\begin{aligned}
&20(ax+b)-4(5x+2ab)=5\\
&20ax+20b-20x-8ab=5\\
&20(a-1)x=5-20b+8ab
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{i})$ عندما $a\neq 1$:

$$x=\frac{5-20b+8ab}{20(a-1)}$$

$(\boldsymbol{ii})$ عندما $a=1$ و $b=\frac{5}{12}$:

تصبح المعادلة

$$0\cdot x=0$$

ولذلك فإن أي عدد حقيقي هو حل لقيمة x.

$(\boldsymbol{iii})$ عندما $a=1$ و $b\neq\frac{5}{12}$:

تصبح المعادلة

$$0\cdot x=5-12b$$

ولذلك **لا يوجد حل لقيمة** x.

(5)

بتحويل المعادلة المعطاة إلى الصورة

$$(2a+3b-12)x=5-3a$$

نحصل على:

$$2a+3b-12=0 \qquad and \qquad 5-3a=0$$

ومنها:

$$a=\frac{5}{3} \qquad , \qquad b=\frac{12-2a}{3}=\frac{26}{9}$$

(6)

$$2a(x+6) = 4x+1$$
$$\Longrightarrow (2a-4)x = 1-12a$$

وبما أن المعادلة **ليس لها حل**، فهذا يعني أن:

$$2a-4=0 \quad and \quad 1-12a \neq 0$$

$$\therefore a = 2$$

(7)

$$x = \frac{12}{k}$$

وبما أن x عدد صحيح موجب، فإن k أيضًا عدد صحيح موجب، وهو أحد **عوامل العدد 12**. إذن:

$$k = 1,2,3,4,6,12$$

وبالتالي فعدد قيم k الممكنة هو 6 قيم

(8)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{x+2} < \frac{13}{12} < \frac{3}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{x+2}{3} > \frac{12}{13} > \frac{x}{3}$$

$$\Longrightarrow x+2 > \frac{36}{13} > x$$

$$\Longrightarrow 13(x+2) > 36 > 13x$$

قيم x الصحيحة التي تحقق أن $36 > 13x$ هي 1,2

لكن $x=1$ لا تحقق $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$

وبالتالي $x=2$ هي القيمة الصحيحة الموجبة الوحيدة التي تحقق المعادلة.

(9)

بما أن 4 حل للمعادلة:

$$3a-x=\frac{x}{2}+3$$

فسنستبدل 4 بـــ x لنحصل على:

$$3a-4=\frac{4}{2}+3$$
$$\Longrightarrow 3a=9 \Longrightarrow a=3 \Longrightarrow (-a)^2-2a=9-6=3$$

(10)

من المعادلة المعطاة نحصل على:

$$\frac{n(x-n)-m(x-m)}{mn}=\frac{m}{n}$$
$$\Longrightarrow (n-m)x-n^2+m^2=m^2$$
$$\Longrightarrow (n-m)x=n^2$$

عند $n \neq m$ فإن:

$$x=\frac{n^2}{n-m}$$

وعند $n=m$ لا يوجد حل:

نظام المعادلات الخطية الآتية:

تدريبات:

(1)

$$\begin{cases}\dfrac{x-y}{5}-\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow(1)\\ 2(x-y)-3(x+y)+1=0\longrightarrow(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) :

$$\frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{4}=\frac{1}{2}\Longrightarrow 4(x-y)-5(x+y)=10\Longrightarrow x+9y=-10\longrightarrow(3)$$

من المعادلة (2) :

$$2(x-y)-3(x+y)+1=0\Longrightarrow x+5y=1\longrightarrow(4)$$

بطرح $(3)-(4)$:

$$4y=-11\Longrightarrow y=-\frac{11}{4}$$

وبالتعويض عن y في المعادلة (4) :

$$x=1-5y=1+\frac{55}{4}=\frac{59}{4}$$

(2)

$$\begin{cases}5.4x+4.6y=104\longrightarrow(1)\\ 4.6x+5.4y=96\longrightarrow(2)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين $(1)+(2)$ سنحصل على:

$$10x+10y=200\Longrightarrow x+y=20\longrightarrow(3)$$

وبطرح المعادلتين $(1)-(2)$ سنحصل على:

$$0.8x-0.8y=8\Longrightarrow x-y=10\longrightarrow(4)$$

بجمع المعادلتين $(3)+(4)$ سنحصل على:

$$2x=30\Longrightarrow x=15$$

وبالتعويض عن x في (3) نجد أن:

$$x+y=20\Longrightarrow 15+y=20\Longrightarrow y=5$$

(3)

$$\begin{cases}x+2(5x+y)=16\longrightarrow(1)\\ \quad 5x+y=7\longrightarrow(2)\end{cases}$$

بالتعويض عن قيمة $5x+y$ بـــ 7 في المعادلة (1) نحصل على:

$$x+2(5x+y)=16\Longrightarrow x+2(7)=16\Longrightarrow x=2$$

وبالتعويض عن x في (2) نجد أن:

$$5x+y=7\Longrightarrow 5(2)+y=7\Longrightarrow y=-3$$

(4)

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \longrightarrow (1) \\ x + 3y + 6z = 15 \longrightarrow (2) \end{cases}$$

افرض:

$$t = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Longrightarrow x = 2t\,, y = 3t\,, z = 5t$$

وبالتعويض في (2) :

$$x + 3y + 6z = 15 \Longrightarrow 2t + 9t + 30t = 15 \Longrightarrow t = \frac{15}{41}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$x = \frac{30}{41}\,, y = \frac{45}{41}\,, z = \frac{75}{41}$$

(5)

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$$

من المعادلات المعطاة نجد أن:

$$x = 5 - 2y\,, y = 8 - 2z\,, z = 11 - 2u\,, u = 6 - 2x$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2y = 5 - 2(8 - 2z) = -11 + 4z = -11 + 4(11 - 2u) = 33 - 8u \\ &= 33 - 8(6 - 2x) = -15 + 16x \end{aligned}$$

$$\therefore x = -15 + 16x \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow u = 4\,, z = 3\,, y = 2$$

(6)

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = a \longrightarrow (1) \\ 5y - z + 3x = b \longrightarrow (2) \\ 5z - x + 3y = c \longrightarrow (3) \end{cases}$$

إذا قمنا بـــ $2 \times (1) + (2) - (3)$ نحصل على:

$$14x = 2a + b - c \Longrightarrow x = \frac{2a + b - c}{14}$$

وعند $2 \times (2) + (3) - (1)$ نحصل على:

$$14y = 2b + c - a \Longrightarrow y = \frac{2b + c - a}{14}$$

وعند $2 \times (3) + (1) - (2)$ نحصل على:

$$14z = 2c + a - b \Longrightarrow z = \frac{2c + a - b}{14}$$

(7)

لأن $x=2,\ \ y=1$ حلول النظام فسنقوم بالتعويض عن قيمهم في النظام لنحصل على:

$$\begin{cases} 2a+b=7 \longrightarrow (1) \\ 2b+c=5 \longrightarrow (2) \end{cases}$$

وللتخلص من b نقوم بـــ $2\times(1)-(2)$ فنحصل على:

$$4a-c=9$$

(8)

$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+y-z=0 \\ 4ax+5by-z=-22 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax-by+z=8 \\ x+y+5=c \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى في النظام الأول نحصل على $y=3x-5$

بالتعويض عنها في المعادلة الأخيرة من النظام الثاني ينتج: $2x+3(3x-5)=-4$

وبحلها نجد أن: $x=1\,,y=-2$

ثم من المعادلة الثانية في النظام الأول نحصل على $z=0$.

وبذلك، من المعادلة الثانية في النظام الثاني نجد أن $c=4$.

وعند حل النظام:

$$4a-10b=-22, a+2b=8$$

نحصل على الحل لكل من $a\,,b$:

$$a=2, b=3.$$

إذاً، $a=2\,,b=3\,,c=4$

(9)

(a) عند:

$$\frac{k}{6}\neq\frac{-1}{3}$$

أي أن $k\neq-2$ فإن للنظام حل وحيد وهو:

$$x=0\,,y=-\frac{1}{3}$$

(b) عند:

$$\frac{k}{6}=-\frac{1}{3}$$

فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

(c) يستحيل أن يكون النظام بلا حلّ.

(10)

$$\begin{cases} 2020(x-y)+2021(y-z)+2022(z-x)=0 \\ \\ 2020^2(x-y)+2021^2(y-z)+2022^2(z-x)=2021 \end{cases}$$

افرض $u=x-y\,,v=y-z\,,w=z-x$

وبالتالي فإن $u\,,v,w$ تحقق النظام التالي:

$$\begin{cases} u+v+w=0 \longrightarrow (1) \\ 2020u+2021v+2022w=0 \longrightarrow (2) \\ 2020^2u+2021^2v+2022^2w=2021 \longrightarrow (3) \end{cases}$$

الآن بـــ $2021\times(1)-(2)$ نحصل على:

$$u-w=0 \Longrightarrow u=w$$

وبالتعويض في (1) نجد:

$$v=-2w$$

الآن بالتعويض في (3) نحصل على:

$$\begin{aligned} &(2020^2-2\cdot 2021^2+2022^2)w=2021 \\ &\Longrightarrow [(2022+2021)-(2021+2020)]w=2021 \\ &\Longrightarrow 2w=2021 \\ &\Longrightarrow z-y=-v=2w=2021 \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{cases} x-y-z=5 \longrightarrow (1) \\ y-z-x=1 \longrightarrow (2) \\ z-x-y=-15 \longrightarrow (3) \end{cases}$$

بجمع $(1)+(2)+(3)$ نحصل على:

$$x+y+z=9 \longrightarrow (4)$$

الآن بجمع $(2)+(3)$ نحصل على:

$$-2x=-14 \Longrightarrow x=7$$

وبجمع $(2)+(4)$ نحصل على:

$$2y=10 \Longrightarrow y=5$$

وبجمع $(3)+(4)$ نحصل على:

$$2z=-6 \Longrightarrow z=-3$$

(12)

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \longrightarrow (1) \\ y - z + u = 2 \longrightarrow (2) \\ z - u + v = 3 \longrightarrow (3) \\ u - v + x = 4 \longrightarrow (4) \\ v - x + y = 5 \longrightarrow (5) \end{cases}$$

بجمع المعادلات نحصل على:

$$x + y + z + u + v = 15 \longrightarrow (6)$$

الآن بجمع $(1) + (5)$, $(5) + (4)$, $(4) + (3)$, $(3) + (2)$, $(2) + (1)$ نحصل على:

$$\begin{cases} x + u = 3 \\ y + v = 5 \\ z + x = 7 \\ u + y = 9 \\ v + z = 6 \end{cases}$$

وبالتعويض بمجموع الأزواج التي حصلنا عليها في (6) نحصل على:

$$x = 0, y = 6, z = 7, u = 3, v = -1$$

التحليل إلى عوامل:

تدريبات:

(1)

$x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$

(2)

$x^2 - 6x - 7 = (x-7)(x+1)$

(3)

$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

(4)

$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x-5)(x+5)$

(5)

$x^2 - 13x + 42 = (x-7)(x-6)$

(6)

$2x^2 + 5x + 2 = (2x+1)(x+2)$

(7)

$x^3 - 1000 = x^3 - 10^3 = (x-10)(x^2 + 10x + 100)$

(8)

$15x^3 + 7x^2 - 2x = x(15x^2 + 7x - 2) = x(5x-1)(3x+2)$

(9)

$5x^3 - 625 = 5(x^3 - 125) = 5(x^3 - 5^3) = 5(x-5)(x^2 + 5x + 25)$

(10)

$30x^4 + 5x^3 - 5x^2 = 5x^2(6x^2 + x - 1) = 5x^2(2x+1)(3x-1)$

(11)

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$

(12)

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)(x+5) = (x+5)^2$

(13)

$6x^3y - 13x^2y + 6xy = xy(6x^2 - 13x + 6) = xy(3x-2)(2x-3)$

(14)

$2x^2 + 10x + 12 = 2(x^2 + 5x + 6) = 2(x+3)(x+2)$

(15)

$12x^2y^2 - 15xy^2 - 63y^2 = 3y^2(4x^2 - 5x - 21) = 3y^2(x-3)(4x+7)$

(16)

$$24x^3 + 10x^2y - 50xy^2 = 2x(12x^2 + 5xy - 25y^2) = 2x(4x - 5y)(3x + 5y)$$

(17)

$$9 - 4y^2 = 3^2 - (2y)^2 = (3 - 2y)(3 + 2y)$$

(18)

$$x^{12} - 1 = (x^6 - 1)(x^6 + 1) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)((x^2)^3 + 1)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

(19)

$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{9} = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{36}(3a^2 - 2)(3a^2 + 2)$$

(20)

$$y^6 - 81 = (y^3)^2 - 9^2 = (y^3 - 9)(y^3 + 9)$$

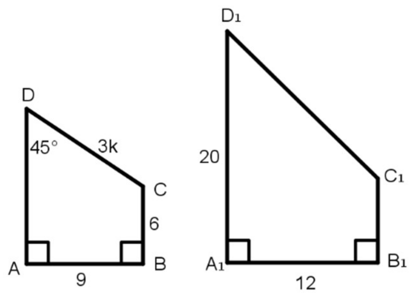
حلول (الهندسة)

حلول تدريبات التشابه:

$(1-8)$

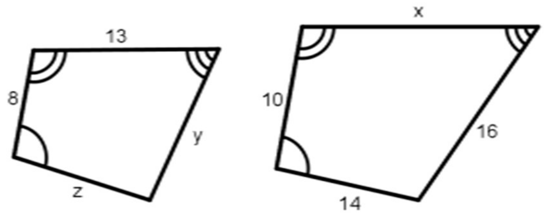
	المضلعان	دائما متشابهان	أحيانا متشابهان	التشابه مستحيل
(1)	مثلثان متطابقا الأضلاع	√		
(2)	مثلثان متطابقا الضلعين.		√	
(3)	مربعان.	√		
(4)	معينان.		√	
(5)	مثلثان قائما الزاوية.		√	
(6)	مثلثان مختلفا الأضلاع.		√	
(7)	مستطيلان.		√	
(8)	مثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا.			√

$(9-16)$



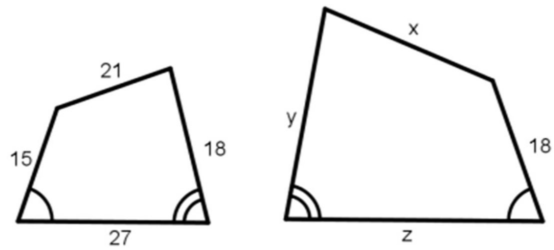
(9)	نسبة التشابه بين $ABCD$ ، $A_1B_1C_1D_1$.	$\frac{3}{4}$
(10)	ما هو نوع الرباعي A_1, B_1, C_1, D_1؟	شبه منحرف
(11)	$m\angle D_1$ يساوي	$45°$
(12)	$m\angle C_1$ يساوي.	$180-45=135°$
(13)	C_1B_1 يساوي.	$\frac{12}{9}=\frac{C_1B_1}{6} \Longrightarrow C_1B_1=8$
(14)	أوجد AD يساوي.	$\frac{12}{9}=\frac{20}{AD} \Longrightarrow AD=15$
(15)	C_1D_1 يساوي.	$\frac{12}{9}=\frac{C_1D_1}{3k} \Longrightarrow C_1D_1=4k$
(16)	النسبة بين محيط المضلعين يساوي.	$\frac{3}{4}$

(17)



$$\frac{10}{8}=\frac{x}{13}\Rightarrow x=\frac{65}{4}$$
$$\frac{10}{8}=\frac{16}{y}\Rightarrow y=\frac{64}{5}$$
$$\frac{10}{8}=\frac{14}{z}\Rightarrow z=\frac{56}{5}$$

(18)



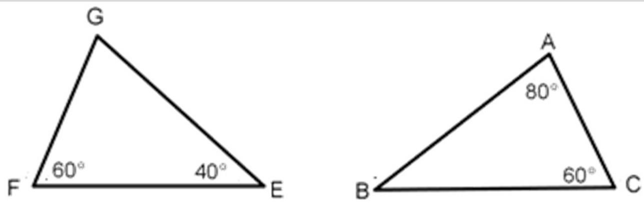
$$\frac{18}{15}=\frac{y}{18}\Rightarrow y=\frac{108}{5}$$
$$\frac{18}{15}=\frac{z}{27}\Rightarrow z=\frac{162}{5}$$
$$\frac{18}{15}=\frac{x}{21}\Rightarrow x=\frac{126}{5}$$

حلول تدريبات تشابه المثلثات:

$(1 - 9)$

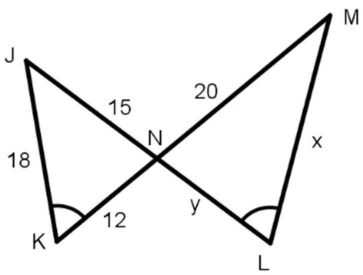
رقم التدريب	التشابه
1	متشابهان
2	غير متشابهين
3	متشابهان
4	متشابهان
5	متشابهان
6	لا يمكن الاستنتاج
7	متشابهان
8	لا يمكن الاستنتاج
9	متشابهان

(10)



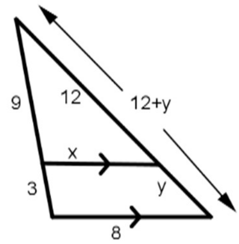
$$\angle ABC = 40^\circ$$
$$\Delta ABC \sim \Delta GEF$$
$$\frac{AB}{GE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{GF}$$

(11)



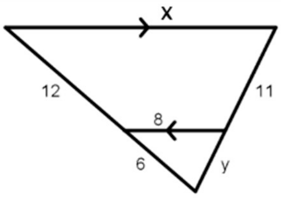
$$\Delta JKN \sim \Delta MLN$$
$$\frac{15}{20} = \frac{12}{y} \Longrightarrow y = 16$$
$$\frac{15}{20} = \frac{18}{x} \Longrightarrow x = 24$$

(12)



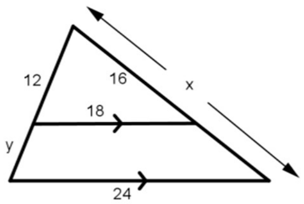
$$\frac{9}{12}=\frac{12}{12+y}\Longrightarrow y=4$$
$$\frac{9}{12}=\frac{x}{8}\Longrightarrow x=6$$

(13)



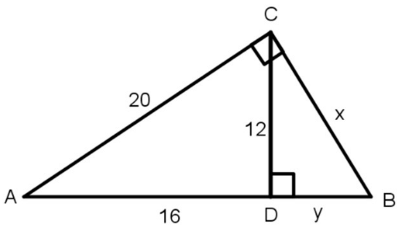
$$\frac{6}{18}=\frac{y}{11+y}\Longrightarrow y=\frac{11}{2}$$
$$\frac{6}{18}=\frac{8}{x}\Longrightarrow x=24$$

(14)



$$\frac{18}{24}=\frac{12}{12+y}\Longrightarrow y=4$$
$$\frac{18}{24}=\frac{16}{x}\Longrightarrow x=\frac{64}{3}$$

(15)

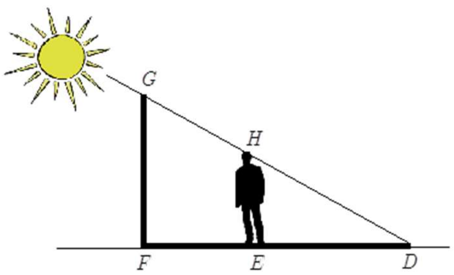


$a)\;\; \Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

$b)\;\; \frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AC}\Longrightarrow \frac{y}{12}=\frac{12}{16}=\frac{x}{20}$

$\Longrightarrow x=15\;, \qquad y=9$

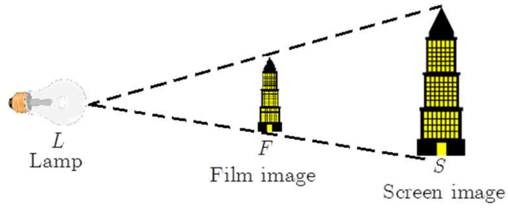
(16)



$\Delta HDE \sim GDF$

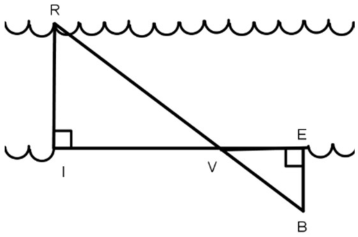
$$\frac{HE}{GF}=\frac{DE}{FD}\Longrightarrow \frac{2}{GF}=\frac{1.6}{4.4}\Longrightarrow GF=5.5m$$

(17)



$$\frac{6\ cm}{24\ m} = \frac{x\ cm}{2.2\ m} \Longrightarrow x = 0.55\ cm$$

(18)



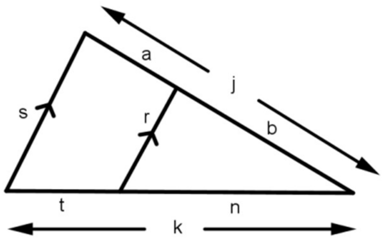
$$\Delta VEB \sim \Delta VIR$$
$$\Longrightarrow \frac{20}{63} = \frac{15}{IR} \Longrightarrow IR = 47.25\ m$$

(19 – 24)

النظرية	عبارة التشابه	التدريب
SAS	$\Delta ABC \sim \Delta GNK$	(19)
SAS	$\Delta ABC \sim \Delta ARS$	(20)
AA	$\Delta ABC \sim \Delta THJ$	(21)
SAS	$\Delta ABC \sim \Delta MBL$	(22)
SSS	$\Delta ABC \sim \Delta XRN$	(23)
AA	$\Delta ABC \sim \Delta AEF$	(24)

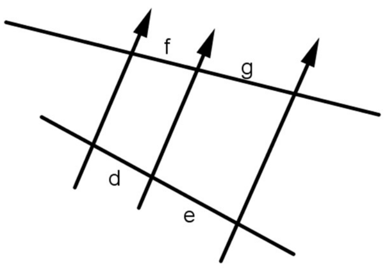
حلول تدريبات الأطوال المتناسبة:

(1)



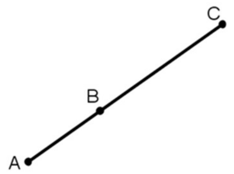
الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{r}{s}=\frac{a}{b}$	X
(b)	$\frac{t}{k}=\frac{a}{j}$	√
(c)	$\frac{j}{a}=\frac{s}{r}$	√
(d)	$\frac{r}{s}=\frac{n}{k}$	√
(e)	$\frac{a}{b}=\frac{n}{t}$	X
(f)	$\frac{b}{j}=\frac{t}{k}$	X

(2)



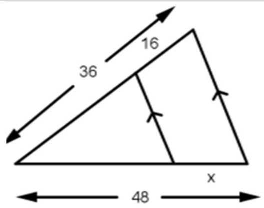
الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{d}{f}=\frac{g}{e}$	X
(b)	$\frac{f}{g}=\frac{e}{d}$	X
(c)	$\frac{g}{f}=\frac{e}{d}$	√
(d)	$\frac{d}{f}=\frac{e}{g}$	√

(3 – 6)



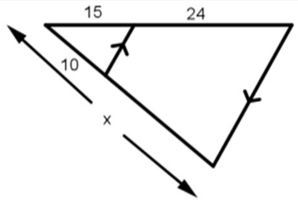
(6)	(5)	(4)	(3)	
37.5	21	15	6	AB
62.5	35	25	10	BC
100	56	40	16	AC

(7)



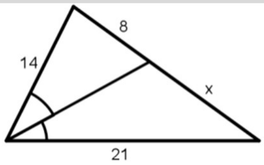
$$\frac{x}{48} = \frac{16}{36} \Longrightarrow x = \frac{64}{3}$$

(8)



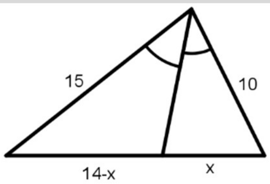
$$\frac{10}{x} = \frac{15}{39} \Longrightarrow x = 26$$

(9)



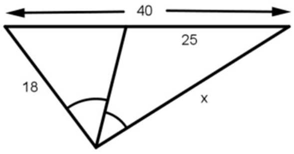
$$\frac{14}{21} = \frac{8}{x} \Longrightarrow x = 12$$

(10)



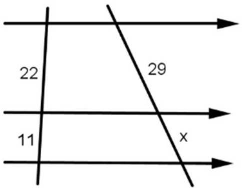
$$\frac{15}{10} = \frac{14 - x}{x} \Longrightarrow x = \frac{28}{5}$$

(11)



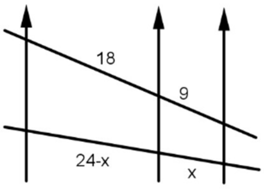
$$\frac{15}{25} = \frac{18}{x} \Longrightarrow x = 30$$

(12)



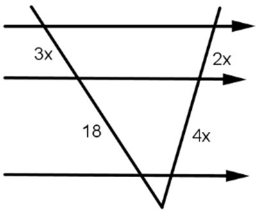
$$\frac{22}{11} = \frac{29}{x} \Longrightarrow x = 14.5$$

(13)



$$\frac{9}{18} = \frac{x}{24 - x} \Longrightarrow x = 8$$

(14)



$$\frac{18}{3x} = \frac{4x}{2x} \Longrightarrow x = 3$$

حلول (نظرية الاعداد)

(1)

الإجابة(b) .

x, y مجموعهما فردي، وبالتالي أحدهما فردي والآخر زوجي. ولأن 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي فإن أحدهما 2، والآخر 73 أولي أيضاً. وبالتالي الحلول هي $(73,2)$، $(2,73)$.

(2)

نستبعد الأعداد الأولية المكونة من خانتين وأحد رقميها 2,4,5,6,8، ونبحث فقط في الأعداد المكونة من خانتين وأرقامها هي 1,3,7,9 (لاحظ لا يوجد عدد أولي مكون من خانتين وأحد خاناته 0)، وبالتجريب نجد الأعداد الأولية المشاغبة هي: 11,13,17,31,37,71,73,79,97 وعددها 9 أعداد.

(3)

لدينا $a(b^b c+1)=2000=2^4.5^3$، وبالتالي $a=5$ أو $a=2$.

عندما $a=5$ نجد $b^b c+1=400$ وبالتالي $b^b c=399=3.7.19$ وهي غير قابلة للحل.

عندما $a=2$ نجد $b^b c+1=1000$ وبالتالي $b^b c=999=3^3.37$، وحلها الوحيد $b=3, c=37$.

وأخيرًا القيمة الوحيدة الممكنة هي $a+b+c=2+3+37=42$.

(4)

لأن $p+q$ عدد زوجي فهناك إمكانيتان:

الأولى: p, q كلاهما زوجي وبالتالي $p=q=2$، ومنها $p-q=0$ وهذا يناقض كون $p-q$ أوليًا.

الثانية: p, q كلاهما فردي وبالتالي $p-q$ عدد زوجي أولي، ومنها $p-q=2$، ومن ثم $p=q+2$ وبالتالي

$$(1+\frac{1}{2})^p(1-\frac{1}{3})^q=(\frac{3}{2})^{q+2}.(\frac{2}{3})^q=(\frac{3}{2})^{q+2}.(\frac{3}{2})^{-q}=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$$

(5)

أي عدد صحيح موجب يمكن كتابته على واحدة من الصور الثلاث $3k, 3m+1, 3m+2$ حيث $k \geq 1, m \geq 0$ عدان صحيحان .

عندما n على الصورة $3k$ فإن $n+3 = 3k+3 = 3(k+1)$ عدد مؤلف (مضاعف لـ 3 أكبر منها).

عندما n على الصورة $3m+2$ فإن $n+7 = 3k+9 = 3(k+3)$ عدد مؤلف (مضاعف لـ 3 أكبر منها).

عندما n على الصورة $3m+1$ فإن $n+3 = 3k+4, n+7 = 3k+8$ يحتمل أن يكونا أوليين،

بالفعل $n=4$ تجعل $n+3=7, n+7=11$ أوليين.

وأخيراً باقي قسمة n على 3 هو 1 .

(6)

عندما $p \geq 5$ فإنه يمكن كتابته على الصورة $6k \pm 1$ (حيث $k \geq 1$ عدد صحيح).

الآن $p = 6k+1$ فإن $2p+1 = 12k+3 = 3(4k+1)$ ليس أوليًا، فهو مضاعف للعدد 3 أكبر من 3.

بينما $p = 6k-1$ فإن $2p+1 = 12k-1$ ربما يكون أولياً،

ويكون $4p+1 = 24k-3 = 3(8k-1)$ عددًا مؤلفًا (فهو مضاعف للعدد 3 أكبر من 3).

(7)

لأن $\frac{a}{b} = \frac{65}{56}$ فيمكننا أن نفرض $a = 65t, b = 56t$ حيث t عدد طبيعي، وبالتالي:

$a+b = 121t$ عدد مؤلف.

(8)

نعيد كتابة المعادلة المعطاة على الصورة: $(m-n)(m+n) - 2(m+n) = 19$ ومنها

$(m+n)(m-n-2) = 19$، ولأن $(m+n) > (m-n-2)$ فإن $m+n = 19, m-n-2 = 1$

وحل النظام هو $m = 11, n = 8$.

(9)

العددان $1661, 1986$ أوليان نسبياً، $1986 = 2 \times 3 \times 331$ (تحليله لأعداد أولية). وبملاحظة أن

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{331} = \frac{1661}{1986}$$

نجد $p+q+r = 2+3+331 = 336$.

(10)

عندما $p = m + n + mn$ قيمة صغرى فإن m, n أصغر ما يمكن، وبالتالي أحدهما 2 والآخر 3 لتماثل وجودهما في قيمة p.
ومن ثم $p = 2 + 3 + 2 \times 3 = 11$. وبالتالي

$\frac{m^2+n^2}{p^2} = \frac{2^2+3^2}{11^2} = \frac{13}{121}$.

(11)

لأن $q = mn$ عدد أولي فإن أحد العددين m, n يساوي واحد والآخر يساوي q (غير ذلك يكون q مؤلفًا). ويصبح $p = q + 1$.
ومن ثم p, q عددان أوليان متتاليان. ولا يوجد عددان أوليان متتاليان غير 2 و3. وبالتالي $q = 2, p = 3$
وأيضاً m, n أحدهما يساوي 1 والآخر 2. وأخيرًا

$$\frac{p^p + q^q}{m^n + n^m} = \frac{3^2 + 2^3}{1^2 + 2^1} = \frac{13}{3}$$

(12)

129 مجموع عددين طبيعيين فلابد أن يكون أحدهما زوجي والآخر فردي،
وذلك يتطلب أن يكون p, q أحدهما زوجي، وبالتالي p, q أحدهما 2 (لأنه لا يوجد عدد أولي زوجي غير الـ 2).
عند $p = 2$ نجد $q = 17$ وعندها $p + q = 19$.
وعند $q = 2$ فإن $p = 23$ وعندها $p + q = 25$.
وأخيراً $(p + q) \in \{19,25\}$.

(13)

واضح أن $p = 2,3$ لا يحقق.
بينما $p = 5$ تجعل الأعداد المعطاة على الترتيب 5,7,11,13,19 كلها أولية،
إذا افترضنا أن $p > 5$ فسيكون على أحد الصور الخمس التالية
عندما $p = 5k, k > 1$ فإن p ليس أوليًا (لا يحقق).
عندما $p = 5k + 1, k \geq 1$ فإن $p + 14 = 5k + 15$ ليس أوليًا (لا يحقق).
عندما $p = 5k + 2, k \geq 1$ فإن $p + 8 = 5k + 10$ ليس أوليًا (لا يحقق).
عندما $p = 5k + 3, k \geq 1$ فإن $p + 2 = 5k + 5$ ليس أوليًا (لا يحقق).
عندما $p = 5k + 4, k \geq 1$ فإن $p + 6 = 5k + 10$ ليس أوليًا (لا يحقق).
الحل الوحيد $p = 5$.

(14)

لا يوجد عددان أوليان متتاليان غير 2 و3 سيكون أحدهما p والآخر q.

لدينا المجموع $6n - 27$ $= (n-1) + (3n-19) + (38-5n) + (7n-45)$.

ولأن p, q أحدهما 2 والآخر 3 يكون المجموع $p + q + 2p + 2q = 15$

(لاحظ تماثل وضع p, q في المجموع مما يجعل ناتج الجمع ثابت سواءًا $p = 2, q = 3$ أو العكس)،

وعندها $6n - 27 = 15$ ومنها $n = 7$ وعلينا التحقق.

(15)

ليكن $M = n^2 + n + 41$، وباختيار $n = 41k$ حيث k عدد صحيح أكبر من أو يساوي 1 نجد

$M = (41k)^2 + 41k + 41 = 41(41k^2 + k + 1)$ عدداً مؤلفًا.

ولأن قيم k غير منتهية، وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من القيم الصحيحة الموجبة للعدد n تجعل العدد M مؤلفًا.

حلول (التركيبات)

التباديل:

(1)

$$15 \times 14 = 210$$

(2)

جميع المجموعات الجزئية ما عدا المجموعة الخالية (جميع الانوار مطفأة):

$$2^7 - 1 = 127$$

(3)

$$2^8 = 256$$

$$2^4 = 16$$

$$4 \times 2^4 = 64$$

(4)

(a) $2026!$

(b)

عدد طرق تلوين مربع في الصف الأول= 2024

عدد طرق تلوين مربع في الصف الأخير= 2023

عدد طرق تلوين مربع في كل صف من الصفوف الأخرى=$(2024)!$

بالتالي عدد الطرق =

$$2024 \times 2023 \times (2024)!$$

(5)

خانة الألوف يمكن أن تكون 1 أو 2، أي لدينا 2 طرق.

الحالة الأولى: إذا كانت خانة الألوف هي الرقم المكرر، نختار الرقم المكرر (2 طرق)، ونحدد الخانة الثانية التي تكرر فيها (3 طرق)، ثم نختار رقمين مختلفين من الأرقام الباقية (9×8÷2 = 36طريقة) ونرتبهما (2×). المجموع = 2×3×36×2 = 432 طريقة.

الحالة الثانية: إذا لم تكن خانة الألوف هي الرقم المكرر، نختار الرقم في الألوف (2 طرق)، والرقم المكرر من 9 أرقام أخرى (9 طرق)، ونختار موقعين له من الخانات الثلاث الباقية (3 طرق)، ثم نختار رقمًا مختلفًا للبقية (8 طرق).

المجموع = 2×9×3×8 = 432 طريقة.

بجمع الحالتين: 432 + 432 = 864 عددًا.

التباديل مع التكرار

(7)

$$\frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = \mathbf{12600}$$

(6)

$$\frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!} \times 2!} = \mathbf{3360}$$

(9)

(a)$\frac{7!}{2!\times2!} = \mathbf{1260}$

(b)$\frac{5!}{2!} = \mathbf{60}$

(8)

$$\frac{\mathbf{9!}}{\mathbf{3!} \times 2!} = \mathbf{30240}$$

(11)

$$\frac{6!}{2!} = \mathbf{360}$$

(10)

$$\mathbf{4!} = \mathbf{24}$$

(13)

كلمة ELEMENTARY فيها 10 حروف، وتكراراتها:

E×3، T ×1، L ×1، M ×1، N ×1، A ×1، R ×1، Y ×1.

إذا اشترطنا أن تكون الحروف E الثلاثة متجاورة،

نعدها كتلة واحدة (EEE). تصبح الكلمة فعليًا

مكوّنة من 8 عناصر مختلفة: $\mathbf{8!} = \mathbf{40320}$

(12)

الإجمالي بدون قيد: $\frac{6!}{3!} = \mathbf{120}$

في كل الكلمات يكون ترتيب حروف A و B هو احد:

AAAB, AABA, ABAA, BAAA

من دون اعتبار R, I مؤقتا

اذن في نصف الحالات فقط يكون الـ B في المنتصف

$$\frac{120}{2} = \mathbf{60}$$

(14)

نفكّك العدد 231 إلى عوامله الأولية: 231 = 3 × 7 × 11 كل عامل أولي يمكن توزيعه بين a وb وc بطرق مستقلة. لكل عامل أولي لدينا 3 خيارات: أن يذهب إلى a أو b أو c. عدد الطرق = 3^3 = 27 ثلاثية مرتبة.

التباديل الدائري

(16)

5 أشياء: !(1 − 5) = 24 طريقة.

7 أشياء: !(1 − 7) = 720.

لـ n أشياء: $(n)!$

(15)

$$(5-1)! = 24$$

(18)

(a) $(36 - 1)! = 35!$

(b) $7! = 5040$

(17)

$$8! = 40,320$$

(20)

إذا لم يُسمح بقلب السلسلة (أي نعتبر الاتجاهين مختلفين):

$$(13 - 1)! = 12!$$

إذا كان قلب السلسلة مسموحًا (أي نعتبر السلسلتين المقلوبتين متماثلتين): نقسم الناتج على 2، عدد السلاسل $\frac{12!}{2}$

(19)

$(5 - 1)! = 24$ (a

$5! = 120$ (b

(22)

(a نرتّب أولًا المهندسين حول المائدة، ولأن الجلوس دائري:

عدد طرق ترتيبهم = $(7-1)! = 720$

يوجد بين كل مهندسين مقعد شاغر (7 أماكن) نرتب الأطباء في 5 أماكن منها بطرق عددها= ${}^{7}P_5$.

إذاً عدد الطرق= ${}^{7}P_5 \times 720$

(b لا يمكن لأن عدد المقاعد الشاغرة بين كل طبيبين أقل من عدد المهندسين

(21)

نرتّب أولًا الأطباء حول المائدة، ولأن الجلوس دائري:

عدد طرق ترتيبهم = $(5-1)! = 24$ طريقة.

الآن يوجد بين كل طبيبين مقعد شاغر (5 أماكن) يجلس فيها المهندسون، نرتّب المهندسين في هذه المقاعد: $5! = 120$ طريقة. إذن المجموع

$24 \times 120 = 2880$ طريقة.

نسمو
NSMO
أولمبياد العلوم
والرياضيات الوطني

موهبة
Mawhiba

وزارة التعليم
Ministry of Education